Statistiques - M1 ingé maths
Fiche 3: familles exponentielles

Emeline Schmisser, `emeline.schmisser@math.univ-lille1.fr`, bureau 314 (bâtiment M3).

Exercice 1 : loi de Poisson
On considère un échantillon de variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, i.i.d. de loi de Poisson $\theta > 0$. On rappelle que :

$$\mathbb{P}(X_i = k) = e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}.$$

On cherche à estimer $\mathbb{P}(X_i = 0)$.

1. Écrire le modèle statistique
2. On s'intéresse à la statistique $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Cette statistique est-elle exhaustive ? Complète ?
3. Calculer $\mathbb{P}(X_i = 0)$. Montrer que $\mathbf{1}_{X_1=0}$ est un estimateur sans biais de cette probabilité.
4. Quelle est la variance de cet estimateur ?
5. Que peut-on dire de $\xi_n = \mathbb{E}\mathbf{1}_{X_1=0}|S_n$?

Il faut maintenant calculer ξ_n.

6. Quelle est la loi de la sommme de deux variables aléatoires de Poisson indépendantes et de paramètres respectifs λ et μ ? En déduire la loi de S_n.
7. Calculer $\mathbb{P}(X_1 = k|S_n = s)$ et en déduire que la loi de X_1 conditionnellement à S_n est une loi binomiale $\mathcal{B}(S_n, 1/n)$.
8. Calculer $\xi_n = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_1=0}|S_n)$.

Exercice 2 : Lois usuelles et familles exponentielles
Pour chacune des familles de lois suivantes, dire si elle est exponentielle régulière et calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance.

1. Loi binomiale de paramètre p.
2. Loi géométrique de paramètre p : $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$
3. Loi uniforme sur $[0, \theta]$.
4. Loi exponentielle de paramètre 1 translatée de θ.
5. Loi exponentielle de paramètre λ.
6. Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
7. Loi du χ^2 à r degré de liberté dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est :

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(r/2)2^{r/2}} x^{r/2-1} e^{-x/2} \mathbf{1}_{x\geq 0}$$

8. loi de Weibull de paramèters $\alpha > 0$ et $\theta > 0$ et dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est : $f(x, \alpha, \theta) = \alpha\theta x^{\alpha-1} e^{-\theta x^\alpha} \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$