Fiche 2 – M1 ingé math
Statistiques exhaustives et statistiques complètes

Emeline Schmisser, emeline.schmisser@math.univ-lille1.fr, bureau 314 (bâtiment M3).

Exercice 1 : Statistiques exhaustives des lois usuelles
On observe n v.a. i.i.d $X_1, \dots, X_n$ pour chacune des lois usuelles suivantes. Pour chaque loi, écrire le modèle statistique, calculer la fonction de vraisemblance et donner une statistique exhaustive.

1. Loi de Bernouilli de paramètre p.
2. Loi de Poisson de paramètre λ.
3. Loi uniforme sur $[0, \theta]$ ($\theta > 0$).
4. Loi exponentielle de paramètre 1 translatée de θ.
5. Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
6. Loi de Pareto de paramètres $\alpha > 1$ et $\theta > 0$ et dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est : $f(x, \alpha, \theta) = \frac{\alpha-1}{\theta}\left(\frac{\theta}{x}\right)^\alpha \mathbf{1}_{x>\theta}$.
7. loi de Weibull de paramèters $\alpha > 0$ et $\theta > 0$ et dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est : $f(x, \alpha, \theta) = \alpha\theta x^{\alpha-1} e^{-\theta x^\alpha} \mathbf{1}_{[0,\infty[}(x)$

Exercice 2 : Loi exponentielle
Soit (X_1, X_2) un échantillon de taille 2 de loi de densité $f(x; \theta) = \theta^{-1} e^{-x/\theta} \mathbf{1}_{x \geq 0}$. X_1 et X_2 sont indépendantes.

1. Montrer que la statistique $Y_1 = X_1 + X_2$ est exhaustive pour θ.
2. Posant $Y_2 = X_2$, donner la loi jointe du couple (Y_1, Y_2).
3. Donner la moyenne et la variance de Y_2. Y_2 est un estimateur de θ, quelles sont ses caractéristiques ?
4. Calculer $\phi(y_1) = \mathbb{E}(Y_2|y_1)$.
5. Calculer la moyenne et la variance de $\phi(Y_1)$.
6. Comparare r ces résultats avec ceux obtenus pour Y_2. Ces résultats étaient-ils prévisibles ?

Exercice 3 : Système industriel
Un système industriel fonctionne en utilisant deux machines de types différents. Les durées de vie X_1 et X_2 de ces deux machines sont deux lois exponentielles de paramètres respectifs λ_1 et λ_2 :

$$f_{X_1}(x) = \lambda_1 e^{\lambda_1 x} \quad f_{X_2}(x) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}$$

1. Calculer la fonction de survie d'une v.a. exponentielle X de paramètre $\lambda > 0$. On rappelle que la fonction de survie $S_X(x)$ vérifie
$$S_X(x) = \mathbb{P}(X > x) = 1 - F_X(x)$$
2. Calculer la probabilité pour que le système ne tombe pas en panne avant la date t. En déduire la fonction de survie du système. Quelle loi suit le système ?
3. Calculer la probabilité pour que la panne soit due à une défaillance de la première machine.

On dispose maintenant de n systèmes identiques et fonctionnant indépendamment les uns des autres,dont on observe les durées de survie $Z_1, \dots, Z_n$.

4. Écrire le modèle statistique correspondant et la vraisemblance des observations. λ_1, λ_2 sont-ils identifiables ?
5. On observe maintenant à la fois la durée de vie et la cause de la défaillance $S_i = \mathbf{1}_{X_i^1 < X_i^2}$. Écrire la vraisemblance des observations. A-t-on maintenant suffisamment d'informations pour identifier λ_1 et λ_2 ?

Exercice 4 : Loi uniforme
Soient $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables i.i.d de loi uniforme sur $[0, \theta]$.

1. Rappeler l'expression de la statistique exhaustive Y_n.
2. Est-ce que cette statistique est complète ?
3. Proposer un estimateur sans biais de variance minimale de θ.
4. Déterminer la loi asymptotique de la variable aléatoire $Z_n = n(\theta - Y_n)$ avec $Y_n = \max_i X_i$.

Exercice 5 : Loi de Bernouilli
Soi $X_1, \ldots, X_n$ un échantillon i.i.d. d'une v.a. X d'une loi de Bernouilli de paramètre p.

1. Rappeler la définition d'une statistique complète. Montrer que $S = \sum_{i=1}^n X_i$ est une statistique complète.
2. Donner un estimateur SBVM de p. Cet estimateur est-il unique ?
3. Montrer que $\bar{X}_n$ est le seul estimateur sans biais de p qui soit fonction de S.