M1 finance: Statistiques non paramétriques
Fiche 7: Approximation

Emeline Schmisser, emeline.schmisser@math.univ-lille1.fr, bureau 314 (bâtiment M3).

Exercice 1 : Il existe des noyaux de tous ordres

1. Quel est l'ordre maximal d'un noyau positif ?
2. Soit $K(u) = (au^2 + bu + c)\mathbf{1}_{|u|\leq 1}$. Que doivent valoir a, b et c pour que K soit un noyau d'ordre au moins 2 ?
3. Quel est l'ordre du noyau K ?
4. Expliquer comment obtenir un noyau d'ordre 5.

Exercice 2 : Construction de noyaux d'ordre l

On considère $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ une famille de polynômes orthonormés dans $L^2([-1,1])$ tels que φ_j est de degré j. On peut par exemple choisir les polynômes de Legendre. Posons

$$K(u) = \sum_{m=0}^{l} \varphi_m(0)\varphi_m(u)\mathbf{1}_{|u|\leq 1}$$

Le but de l'exercice est de montrer que K est un noyau d'ordre l.

1. Pour $j \leq l$, écrire le polynôme u^j en fonction des φ_j (sans préciser les coefficients).
2. Montrer que
$$\int_{-1}^{1} u^j K(u)du = 0^j$$
On utilise deux fois l'expression de u^j en fonction des φ_j.

Exercice 3 : Approximation de f par f_h

Le but de cet exercice est d'approcher la fonction $f : x \to \cos(2\pi x)\mathbf{1}_{0\leq x\leq 1}$ par $K_h f$ pour différents noyau K et différentes valeurs de la fenêtre h.

1. Construire un vecteur x de taille 3000 qui prenne ses valeurs entre -1 et 2. Utiliser la commande `seq`.
2. Construire une fonction f qui à x associe $\cos(2\pi x)\mathbf{1}_{0\leq x\leq 1}$
3. On considère le noyau rectangulaire K. Construire la fonction K.
4. On veut construire f_h. Rappeler sa définition.
5. Est-ce qu'il est possible de calculer exactement f_h avec `R` ?
   Pour calculer f_h, on va approcher l'intégrale avec la méthode des rectangles.
6. Exprimer $f_h(x)$ sous la forme d'une intégrale du type : $\int K(u)g(u)du$.
   Le noyau K est connu, on sait donc quand il est nul (ou très petit, dans le cas d'un noyau qui n'est pas à support compact).
7. Construire une fonction Kh qui dépende du vecteur x et de la fenêtre h et qui approche $f_h(x)$ par la méthode des rectangles (n=1000). Attention : il faut construire des matrices et éviter de faire des boucles.
8. Sur un même graphique, tracer f, f_1, $f_{0.5}$, $f_{0.2}$, $f_{0.1}$ et $f_{0.01}$.

9. Refaire le même exercice avec un noyau gaussien. On considérera que le noyau gaussien est nul si $|x| \geq 5$ et on prendra cette fois-ci $n = 300$.
   Les courbes obtenues sont plus lisses qu'avec le noyau rectangulaire. C'est un avantage pour estimer les fonctions très régulières.

Exercice 4 : Approximation avec la base de Haar
Le but de cet exercice des d'approcher la fonction $f : x \to \cos(2\pi x)\mathbf{1}_{0\leq x\leq 1}$ par f_m où f_m est le projeté de f sur le sous espace vectoriel V_m engendré par les bases de Haar.

1. Construire un vecteur x de taille 3000 qui prenne ses valeurs entre -1 et 2. Utiliser la commande `seq`.
2. Construire une fonction f qui à x associe $\cos(2\pi x)\mathbf{1}_{0\leq x\leq 1}$
3. Construire les deux fonctions ψ et ϕ de la base de Haar.
4. Quelles sont les valeurs de j pour lesquelles ϕ_j et $\psi_{j,m}$ sont non nulles sur l'intervalle d'estimation $[-1, 2]$?
5. Construire une fonction $coef$ qui dépende m et qui calcule les vecteurs ($a_j =< f, \phi_j >$) si $m = 0$ et ($b_{j,m-1} =< f, \psi_{j,m-1} >$) sinon. On pourra utiliser la fonction `rowSums`.
6. Construire une fonction *projete* qui dépende de m et qui calcule f_m.
7. Sur le même graphique, afficher f, f_0, f_1, f_2, f_3 et f_4.