M1 finance: Statistiques non paramétriques
Fiche 0: intervalles de confiance et tests usuels

Emeline Schmisser, `emeline.schmisser@math.univ-lille1.fr`, bureau 314 (bâtiment M3).

Exercice 1 : Loi binomiale
Soit X une loi binomiale $\mathcal{B}(10, p)$ avec p ayant pour valeurs possibles 1/4 ou 1/2. On observe une variable X_1. On décide que l'hypothèse $H_0 : p = 1/2$ est rejetée et que l'hypothèse $H_1 : p = 1/4$ est acceptée si la valeur observée $X_1 \leq 3$.

1. Quelle est la zone de rejet ?
2. Calculer le niveau de ce test.
3. Calculer la puissance de ce test.
4. Quelles sont les erreurs de première et de seconde espèces ?

Exercice 2 : Poids d'un nouveau-né
Le poids moyen d'un nouveau né est une variable d'écart-type égal à 0.5 kg. Le poids moyen des 49 nouveau-nés en un mois dans un hôpital a été de 3.6kg.

1. Déterminer un intervalle de confiance approché de niveau 95% pour le poids moyen d'un nouveau né dans la population desservie par cet hôpital. Quelle est la validité de cette approximation ?
2. Quel serait le degré de confiance d'un intervalle de longueur 0,1kg centré à 3.6kg pour ce poids moyen ?

Exercice 3 : Sondage
On fait un sondage sur 40 employés d'une entreprise de 400 personnes. Quatre d'entre eux répondent favorablement à une question.

1. Déterminer un intervalle de confiance bilatéral pour la fréquence dans l'ensemble de la population, au risque 10% grâce à une méthode approchée.
2. Combien d'employés faudrait-il interroger pour obtenir la même précision sur la fréquence si l'entreprise comportait 5000 employés ?

Exercice 4 : Défectueux, test asymptotique
On se propose d'établir un contrôle de réception pour la livraison d'un grand nombre de pièces de série. On disigne par p le pourcentage de pièces défectueuses dans le lot livré et l'on envisage deux hypothèses extrêmes :

$$\begin{cases} H_0 : & p = 5\% \\ H_1 : & p = 10\% \end{cases}$$

Si H_0 est vraie, l'acheteur accepte la fabrication. Sinon, la fabrication est refusée. On décide d'examiner 400 pièces et de fixer un pourcentage critique de 7% tel que, si $\hat{p}$ désigne le pourcentage de pièces défectueuses dans la livraison :

- si $\hat{p} < 7$, on accepte la livraison
- si $\hat{p} \geq 7$, on refuse la livraison.

1. Est-ce que ce test est uniformément plus puissant ?
2. Calculer les risques asymptotiques de première et de seconde espèce correspondant à cette règle de décision.

Exercice 5 : Comparaison de deux lois
On compare les notes de deux groupes de TD. Le premier groupe a 27 étudiants, le deuxième 25. On veut savoir si les notes des deux groupes suivent la même loi. La moyenne dans le premier groupe est 11, celle du second 12.3. La variance dans le premier groupe est de 9 celle dans dans le second groupe de 8.4.

On va commencer par tester si les deux variances sont égales. On fixe le niveau à 10%.

1. Préciser H_0 et H_1.
2. Quelle est la loi de
$$\frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma_2^2}}$$
3. Vers quoi tend cette statistique si les effectifs tendent tous les 2 vers l'infini ?
4. En déduire la forme de la zone de rejet.
5. Donner la zone de rejet et conclure.

On admet que les variances sont égales. On va maintenant regarder si les moyennes sont égales. Comme précédemment, on fixe le niveau à 10%.

6. Préciser H_0 et H_1.
7. Quelle est la loi de $(n_1 - 1)\hat{\sigma}_1^2 + (n_2 - 1)\hat{\sigma}_2^2$?
8. Quelle est la loi de $\bar{x}_1 + \bar{x}_2$?
9. Sous H_0, quelle est la loi de
$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \frac{1}{\sqrt{(n_1\hat{\sigma}_1^2 + n_2\hat{\sigma}_2^2)/(n-2)}}$$
10. En déduire la forme de la zone de rejet, puis la zone de rejet.
11. Conclure.
12. Est-ce que les deux distributions peuvent suivre des loi différentes ?