M2 recherche Fiche 6 Mouvement Brownien

Emeline Schmisser, `emeline.schmisser@math.univ-lille1.fr`, bureau 314 (bâtiment M3).

1 Mouvement Brownien

Exercice 1 (théorique)

1. Que vaut W_0 ?
2. Quelle est la loi des accroissements du mouvement Brownien ? Sont-ils indépendants ?
3. Expliquer comment simuler un mouvement Brownien aux instants $t = 0, \delta, 2\delta, \dots, n\delta$.
4. Quelle est la loi de W_t ?

Exercice 2 (Simulation de mouvement Brownien)

1. Expliquer comment construire le vecteur $W_0, W_\delta, W_{2\delta}, \dots, W_{n\delta}$.
2. Construire une fonction `brown` qui prenne en argument n et $delta$ et qui trace le graphique de $W_0, W_\delta, W_{2\delta}, \dots, W_{n\delta}$ en fonction du temps. **Indication:** pour construire le vecteur $W_0, W_\delta, W_{2\delta}, \dots, W_{n\delta}$, on construira d'abord le vecteur des accroissements et on reconstruira ensuite le vecteur W.
3. Tracer plusieurs trajectoire de mouvements Browniens pour $n = 1000$ et convainquez-vous que le mouvement Brownien a la même allure à toutes les échelles.

Exercice 3 (Loi de W_T)

1. Réécrire la fonction de la question précédente pour calculer $p = 1000$ trajectoire de mouvements Brownien ($\delta = 0.1$, $T = n\delta = 4$). Garder en mémoire les différentes valeurs de W_T.
2. Tracer un histogramme des valeurs de W_T.
3. Utiliser la fonction `lines` pour superposer la densité théorique de W_T. Commenter.
4. Même question pour $T = 0.1$.

Exercice 4 (Maximum du mouvement Brownien)

1. Construire une fonction `maxbrown` qui prenne en argument T. Cette fonction doit simuler un mouvement Brownien de pas $delta = 0.01$ sur $[0, T]$. Elle doit construire les deux courbes $Bmax(t) = \sup_{u \leq t} W_t$ et $Bmin(t) = \inf_{u \leq t} W_t$. Attention à ce que les deux courbes s'affichent bien sur le graphe !

Exercice 5 (La dérivée du mouvement Brownien n'existe pas)

On fixe $\delta = 10^{-4}$ et $\Delta = 10^{-1}$. Pour pouvoir comparer, on commence par construire les dérivées approchées de la fonction sinus en 0.

1. Construire le vecteur $\sin(\delta), \sin(2\delta), \dots, \sin(\Delta)$
2. Construire le vecteur des dérivées approchées

$$D_k = \frac{\sin(k\delta) - \sin(0)}{k\delta}$$

3. Tracer le graphe de D_k en fonction de $k\delta$. Commenter. On fait maintenant la même chose pour une trajectoire de mouvement Brownien.
4. Construire un vecteur $W_\delta, W_{2\delta}, \ldots, W_\Delta$ pour $\delta = 10^{-3}$ et $\Delta = 10^{-1}$.
5. Construire le vecteur des dérivées approchées
$$D_k = \frac{W_{k\delta} - W_0}{k\delta}$$
6. Tracer D_k en fonction de δk. Commenter.
On considère maintenant la quantité
$$S_k = \frac{W_{k\delta} - W_0}{(k\delta)^{1/2+a}}$$
7. Tracer S_k en fonction de δk. Faire varier a entre $-1/2$ et $1/2$ (le prendre d'abord positif, puis négatif).
8. Vers quoi tend
$$\frac{W_\delta - W_0}{(\delta)^{1/2}}$$
quand δ tend vers 0 ?

Exercice 6 (Variation quadratique)
La variation quadratique du mouvement Brownien, c'est la limite
$$V = \sum_{k=1}^{n} \left(W_{(i+1)T/n} - W_{iT/n}\right)^2$$

1. (théorique) Montrer que $\lim_{n\to\infty} V = T$. **Indication:** Montrer que l'espérance vaut T et que la variance tend vers 0.
2. Construire une fonction qui, étant donné T et δ, simule une trajectoire de mouvement Brownien et calcule la variation quadratique.
3. Tracer la variation quadratique en fonction de δ pour $T = 4$ (faire varier δ de 10^-3 à 1). Commenter.
4. On fixe $\delta = 10^(-3)$. Tracer la variation quadratique en fonction de T (faire varier T de 0.1 à 10). Superposer la première bissectrice. Commenter.