

# Fiche 2 - M2 Recherche

## LGN et TCL

Emeline Schmisser, emeline.schmisser@math.univ-lille1.fr, bureau 314 (bâtiment M3).

### 1 Loi des grands nombres

#### Exercice 1 (Illustration de la loi des grands nombres)

1. Rappeler la loi des grands nombres
2. Simuler 50000 variables  $x_i$  de loi normale  $\mathcal{N}(0,1)$  (avec `rnorm`) **Indication:** : ne pas les afficher mais les sauver dans un vecteur  $x$ .
3. Calculer les moyennes partielles

$$\bar{x}_m = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i$$

**Indication:** : Construire d'abord le vecteur des 50000 premiers entiers.

Utiliser ensuite la fonction `cumsum` et utiliser le vecteur que l'on vient de construire pour la division.

4. Représenter sur un graphique (commande `plot`) l'évolution de  $\bar{x}_m$  en fonction de  $m$ .
5. Procéder de même avec :
  - une loi normale  $\mathcal{N}(2,5)$
  - une loi exponentielle de paramètre 2
  - une loi binomiale  $\mathcal{B}(10,0.5)$
  - une loi de Cauchy.**Indication:** Surtout ne pas réécrire tout le programme. Il suffit de changer la première ligne!
6. Est-ce que toutes les lois qu'on vient de citer vérifient la loi des grands nombres? Commenter les résultats.

### 2 Théorème centrale limite

#### Exercice 2 (Illustration du théorème centrale limite)

1. Rappeler le TCL.
2. Que se passe-t-il dans le cas de variables gaussiennes?  
On veut maintenant illustrer le théorème centrale limite dans  $\mathbb{R}$  pour la loi  $\mathcal{B}(1,0.5)$ .
3. Quelle est l'espérance de cette loi? Sa variance? Dans la suite, on note  $p$  l'espérance et  $\sigma$  la variance.  
On fixe  $r = 2000$ ,  $n = 1000$ .
4. On crée une matrice  $x$  de taille  $r * n$  telle que

$$x_{i,j} \sim \mathcal{B}([1,0.5])$$

5. Construire le vecteur  $y$  tel que :

$$y_j = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\sigma}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{i,j} - p)$$

On pourra utiliser la fonction `colMeans` ou `rowMeans`.

6. Tracer l'histogramme de  $y$  : `hist(y,20,freq=FALSE)`  
7. Sur le même graphique, tracer la densité de la loi normale centrée réduite

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

**Indication:** : Comme à la section graphique. Attention à ne pas utiliser les lettres  $x$  et  $y$  pour créer des vecteurs! Utiliser la commande `lines` qui est plus adaptée.

8. Simuler  $n$  variables de loi normale centrée réduite et faire un qqplot avec  $y$ . Tracer par-dessus la première bissectrice.  
9. Faire la même chose pour une loi exponentielle de paramètre 2 (encore une fois, il suffit de changer quelques paramètres).