M1 finance: Logiciels statistiques
TP2: simulation de variables aléatoires

Emeline Schmisser, `emeline.schmisser@math.univ-lille1.fr`, bureau 314 (bâtiment M3).

Exercice 1 : Simulation d'une loi uniforme sur un losange
On veut simuler des variables i.i.d sur le losange donné par les points : $(0,-2)$, $(1,0)$, $(0,2)$, $(-1,0)$.

1. Écrire une fonction `carre` qui simule n variables aléatoires sur le carré $[-1,1]^2$.
2. Représenter graphiquement le losange.
3. Quelle transformation permet de passer du carré au losange ?
4. Écrire une fonction `losange` qui simule n variables aléatoires sur le losange.
5. Représenter graphiquement 500 points.

Exercice 2 : Simulation d'une loi uniforme sur le disque

1. Tracer le cercle de rayon 1 et de centre l'origine.
2. Écrire une fonction `rond` permettant de simuler n points de loi uniforme sur le disque de centre 0 et de rayon 1.
3. Représenter graphiquement 1000 points simuler suivant la loi uniforme sur le disque (sans effacer le graphe précédent).
4. Tracer l'ellipse d'équation
$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} \leq 1$$
avec $a = 2$ et $b = 3$.
5. Écrire une fonction `ellipse` qui prenne en entrée a, b et n et qui simule n variables uniformes sur l'ellipse. On utilisera la fonction `rond`.
6. Représenter graphiquement 1000 points suivant la loi uniforme sur l'ellipse.

Exercice 3 : Nombre de points fixes dans une permutation
Le nombre de points fixes Z dans une permutation des n premiers entiers suit la loi :

$$\mathbb{P}(Z = k) = f(k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}$$

On s'intéresse au nombre de permutations sur les 100 premiers entiers.

1. Écrire une fonction f qui calcule $f(k)$.
2. Écrire un programme $fixe$ qui simule N réalisations du nombre de points fixes sur une permutation des 10 premiers entiers.
3. Réaliser 1000 simulations, puis tracer l'histogramme obtenu. L'histogramme doit comporter une barre pour chaque entier.

4. Superposer les probabilités théoriques.

Exercice 4 : Loi Gamma

1. Écrire une fonction `weibull` qui simule n variables de loi de Weibull de paramètre a.
2. Écrire une fonction `gamma` qui simule n variables de loi $\Gamma(a)$ pour $a < 1$.
3. Simuler 1000 variables aléatoires de loi $\Gamma(a)$. Tracer l'histogramme.
4. Superposer la densité théorique.