

Master M1 Finance – logiciels

TD4: Tests du χ^2

Emeline Schmisser, emeline.schmisser@math.univ-lille1.fr, bureau 314 (bâtiment M3).

Exercice 1 : Cas $k = 2$ pour le test du χ^2

1. Montrer que si $k = 2$, alors

$$T = \frac{(N_1 - np_1)^2}{np_1(1 - p_1)}$$

où N_1 est le nombre d'observations dans la première classe et p_1 la probabilité d'être dans cette classe.

2. On observe des variables i.i.d (X_1, \dots, X_n) ($n \geq 30$) de loi de Bernoulli de paramètre p . On veut tester si $p = p_0$ au niveau $\alpha = 5\%$.
 - (a) Calculer la zone de rejet bilatérale en utilisant l'approximation par la loi normale.
 - (b) Calculer la zone de rejet bilatérale en utilisant un test du χ^2 .
 - (c) Comparer.
 - (d) Est-ce que le résultat est logique ?

Exercice 2 : Pasteur contre la génération spontanée

Au 19^{ème} siècle, on pensait que les moisissures apparaissaient spontanément dans l'air. Louis Pasteur a montré qu'au contraire, les germes de moisissures étaient présents dans l'air, et d'autant plus présents que l'air est pollué. Pour cela, il prépare 20 flacons de levure. Il y injecte ensuite de l'air prélevé en ville, à la campagne et au-dessus de la mer de glace. Il observe les résultats suivants :

- Sur les 20 échantillons prélevés en ville, 17 présentent des signes de moisissures.
 - Sur les 20 échantillons prélevés à la campagne, 11 présentent des signes de moisissures.
 - Sur les 20 échantillons prélevés à la mer de glace, 1 seul présente des signes de moisissures.
1. Formuler les hypothèses, en français puis de façon mathématique.
 2. Quelle est la forme de zone de rejet ?
 3. Calculer la statistique de test.
 4. Quelle est sa loi sous H_0 ?
 5. Est-elle très élevée ? Peut-on conclure tout de suite ?
 6. Calculer la p -valeur avec R.
 7. On fixe la zone de rejet à 5%. Calculer la zone de rejet avec R.
 8. Faire le test directement avec `chisq.test`.
 9. Conclure.

Exercice 3 : Mendel

On cultive 2 variétés de petits pois : des petits pois jaunes et des petits pois ridés. On croise ces deux variétés entre elles. L'hybride obtenu a une apparence normale, ils sont verts et lisses (les gènes qui donnent la couleur jaune et ceux qui donnent l'apparence ridée sont donc tous les deux récessifs). On laisse ensuite l'hybride obtenu s'autofertiliser. Cette fois-ci, on obtient 4 types de petits pois : normaux (verts et lisses), jaunes et lisses, verts et ridés et ridés et jaunes. D'après les lois de Mendel, le nombre de petits pois dans chaque catégorie doit suivre une multinomiale de paramètre $(9/16, 3/16, 3/16, 1/16)$. Les résultats de l'expérience sont :

normaux	jaunes	ridés	jaunes et ridés
670	230	238	62

1. Quelles(s) hypothèse(s) peut-on faire sur les données? Quel(s) test(s) peut-on appliquer ici?
2. Formuler mathématiquement les hypothèses H_0 et H_1 .
3. Calculer la statistique de test T .
4. Donner la forme de la zone de rejet.
5. Donner la loi de T sous H_0 .
6. On fixe le niveau du test à 10%. Calculer la zone de rejet avec R.
7. Calculer la p -valeur avec R.
8. Vérifier les résultats avec la fonction `chisq.test`.
9. Conclure.