Logiciels statistiques M1 finance
TD2: Simulation de variables aléatoires

11 décembre 2014

Exercice 1 : Simulation de variables aléatoires
Les lois usuelles sont simulées en général à partir de la loi uniforme sur $[0,1]$. Un programmeur a déjà à sa disposition un générateur de variables uniformes sur $[0,1]$. Expliquer comment il peut simuler :

1. n variables aléatoires suivant une loi de Bernouilli de paramètre p.
2. m variables aléatoires suivant une loi binomiale de paramètre $\mathcal{B}(n,p)$.
3. 1 variable aléatoire de loi géométrique de paramètre p.
4. n variables aléatoires de loi uniforme sur $[a,b]$.
5. n variables aléatoires suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
6. n variables aléatoires suivant une loi de Laplace : $f(x) = \frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda|x|)$
7. n variables aléatoires de loi β de paramètres $a = 2$ et $b = 1$. La densité de cette loi est :

$$f(x) = 2x\mathbf{1}_{x\in[0,1]}$$

Exercice 2 : Simulation de variables aléatoires (bis)

1. Soit X une variable aléatoire de loi expentielle de paramètre $\lambda = -\ln(1-p)$. Calculer $\mathbb{P}(n-1 \leq X < n)$ pour tout entier $n \geq 1$.
2. En déduire une méthode permettant de simuler n variables suivant une loi géométrique.
3. Cette méthode est-elle plus ou moins rapide que la méthode de l'exercice précédent ?
4. Soient U et V deux variables indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$X = (\sqrt{-2\ln(U)}\cos(2\pi V) \quad \text{et} \quad Y = \sqrt{-2\ln(U)}\sin(2\pi V)$$

   Montrer que X et Y sont indépendantes et suivent une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Indication : calculer $f_{X,Y}(x,y)$ par changement de variable.
5. Expliquer comment on peut simuler $2n$ variables de loi normale.

Exercice 3 : Simulation de variables aléatoires, ter
On note C le carré $[-1,1]^2$.

1. Quelle transformation affine permet de passer du carré C au losange L de sommets $(0,\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},0),(0,-\sqrt{2}),(-\sqrt{2},0)$?
2. Quelle transformation affine permet de passer du losange L au losange A de sommets $(0,2),(1,0),(0,-2),(-1,0)$?

3. Quelle transformation affine permet de passer du carré C au losange A ?
4. Expliquer comment simuler n variables i.i.d sur le losange A.

Exercice 4 : Loi Gamma
La loi Γ paramètre $a > 0$ a pour densité

$$f(t) = \frac{1}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-t} \mathbf{1}_{]0,\infty[(t)}$$

Lorsque $a = 1$, c'est la densité de probabilité d'une exponentielle de paramètre 1. Si $a = k \in \mathbb{N}$, c'est simplement la loi de k exponentielles de paramètre 1 indépendantes. On voudrait simuler une variable aléatoire de loi Γ de paramètre $a < 1$. La primitive de la fonction f est difficile à calculer, nous allons donc utiliser la méthode du rejet. Pour cela, il faut trouver une loi à partir de laquelle on va appliquer la méthode du rejet.

1. La loi de Weibull est donnée par la fonction de répartition :

   $$F(x) = 1 - \exp(-x^a)$$

   Montrer que la loi de Weibull de paramètre $a < 1$ peut être utilisée pour simuler une loi Γ par la méthode du rejet.
2. Expliquer comment on peut simuler une loi de Weibull.

Exercice 5 : Nombre de points fixes dans une permutation
On s'intéresse au nombre de points fixes d'une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$. On note Z_n le nombre de points fixes obtenus lors d'une permutation aléatoire des n premiers entiers(choisie uniformément sur toutes les permutations possibles). Z est une variable aléatoire.

1. Que vaut $\mathbb{P}(Z_n = n)$? $\mathbb{P}(Z_n = n-1)$? $\mathbb{P}(Z_n = n-2)$? $\mathbb{P}(Z_n = n-3)$?
2. Exprimer $\mathbb{P}(Z_n = n-k)$ en fonction de $\mathbb{P}(Z_k = 0)$.
   On admet que
   $$\mathbb{P}(Z_k = 0) = \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{j!}$$
3. Exprimer $\mathbb{P}(Z_n = k)$.
4. Montrer que $f(k) = \mathbb{P}(Z_n = k) \leq 1/k!$.
5. On voudrait appliquer la méthode du rejet pour cet exemple. On cherche donc une loi telle que
   $$g_k = \mathbb{P}(X = k) \geq c f(k)$$
   Quelle loi pourrait convenir ?