Absences textuelles

Patrick Popescu-Pampu

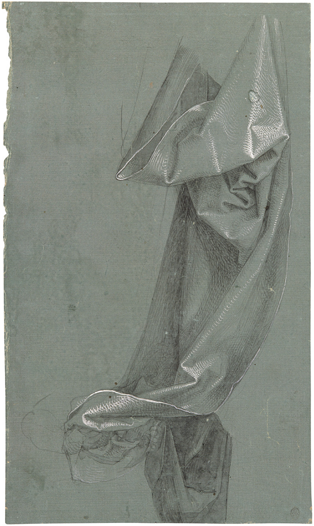
Professeur de Mathématique
Laboratoire Paul Painlevé, Université de Lille

FPMW13 - 13ème Colloque Français de Philosophie des Mathématiques

Université de Nice, 7–9 Octobre 2021

Mon exposé du cycle “*Un texte, un mathématicien*”

Une étude de draperie par Dürer (1508)

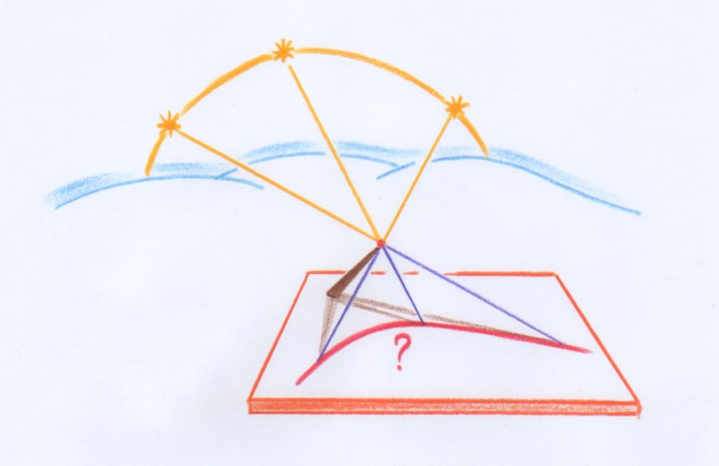


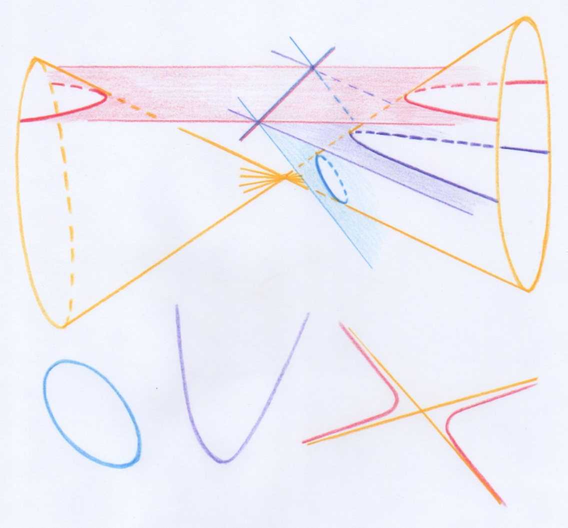
Wikimedia Commons. Provenance : Musée des Beaux-Arts de Lyon.

De grandes baigneuses de Cézanne (1906)

Wikimedia Commons. Provenance : Philadelphia Museum of Art.

Que trace l'ombre du bout du bâton ?





Ellipses, paraboles, hyperboles et leurs **asymptotes**.

Une équation cartésienne

322 LA GEOMETRIE.

tipliant la ſeconde par la troiſieſme on produit $\frac{ab}{c}y - ab$, qui eſt eſgale à $xy + \frac{b}{c}yy - by$ qui ſe produit en multipliant la premiere par la derniere. & ainſi l'equation qu'il falloit trouuer eſt.

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

de laquelle on connoiſt que la ligne E C eſt du premier genre, comme en effect elle n'eſt autre qu'vne Hyperbole.

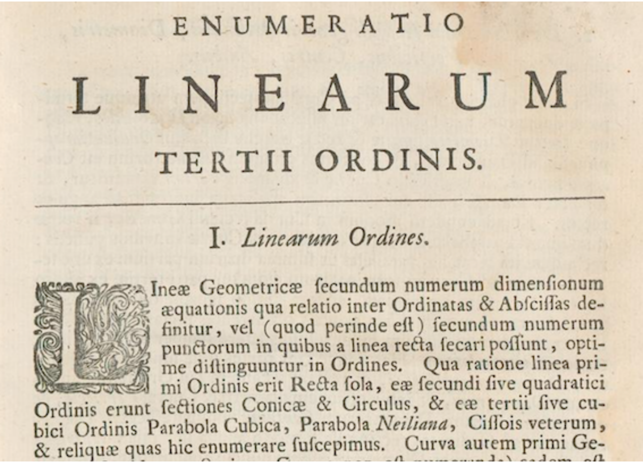
René Descartes, *Géométrie*, 1637.

Par exemple, si a = b = c =1 :

$$y^2 = y - xy + y - 1,$$

ce qui revient à dire que :

$$y^2 + (x-2)y + 1 = 0.$$



ENUMERATIO

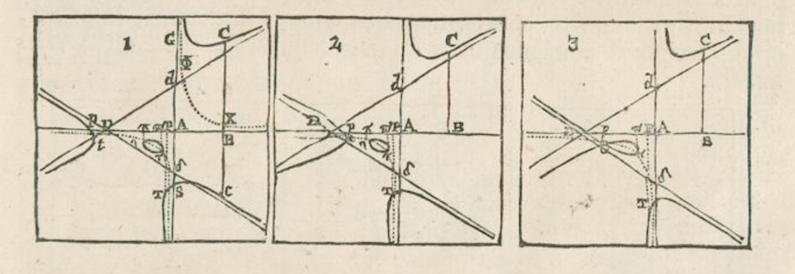
LINEARUM

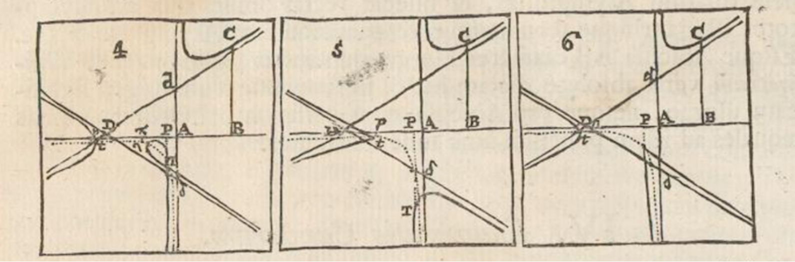
TERTII ORDINIS.

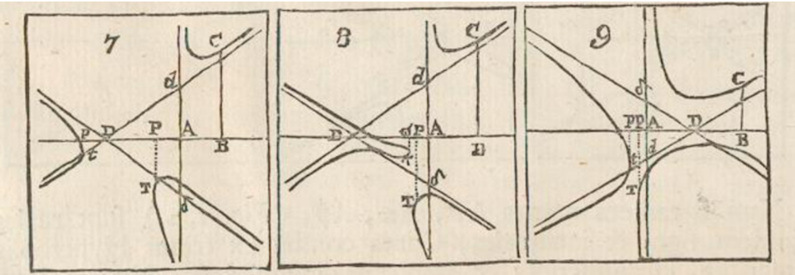
I. *Linearum Ordines.*

Lineæ Geometricæ ſecundum numerum dimenſionum æquationis qua relatio inter Ordinatas & Abſciſſas definitur, vel (quod perinde eſt) ſecundum numerum punctorum in quibus a linea recta ſecari poſſunt, optime diſtinguuntur in Ordines. Qua ratione linea primi Ordinis erit Recta ſola, eæ ſecundi ſive quadratici Ordinis erunt ſectiones Conicæ & Circulus, & eæ tertii ſive cubici Ordinis Parabola Cubica, Parabola *Neiliana*, Ciſſois veterum, & reliquæ quas hic enumerare ſuſcepimus. Curva autem primi Ge-

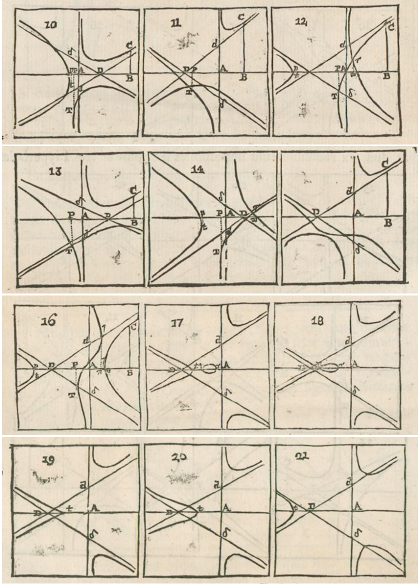
« [...] la **parabole cubique**, la **parabole neiléenne**, la **cissoïde** des anciens et les restantes que nous énumérons ici. »

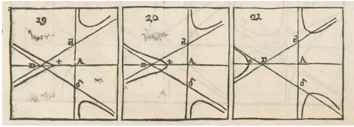
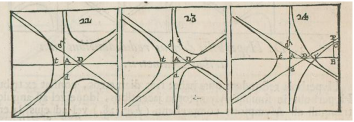
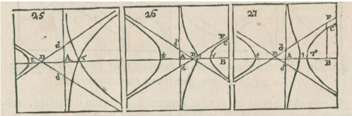
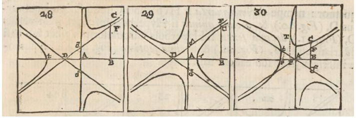
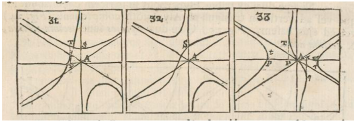
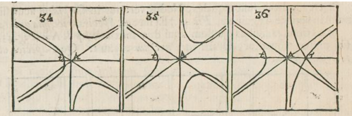
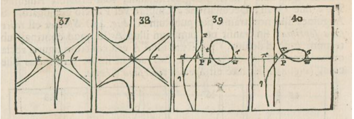
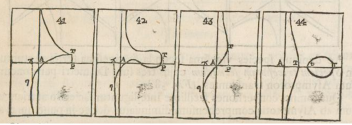



4
5
6

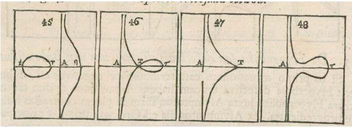

7
8
9

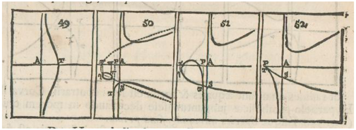
L'« *Enumeratio linearum tertii ordinis* » de Newton (suite)

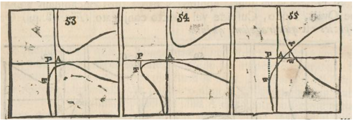


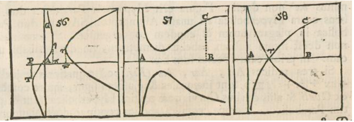

19
20
21

22
23
24

25
26
27

28
29
30

31
32
33

34
35
36

37
38
39
40

41
42
43
44

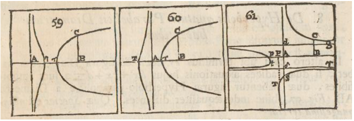
L'« *Enumeratio linearum tertii ordinis* » de Newton (suite)

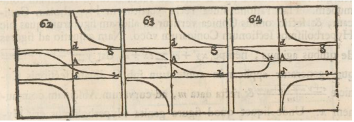


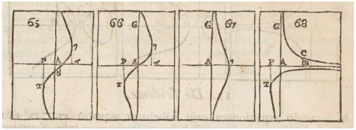


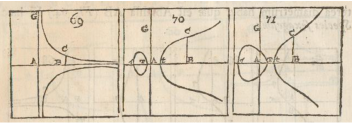


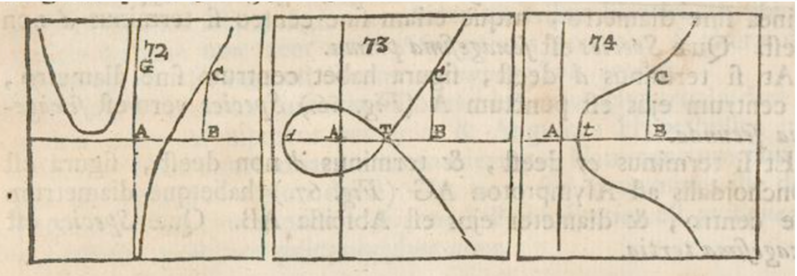


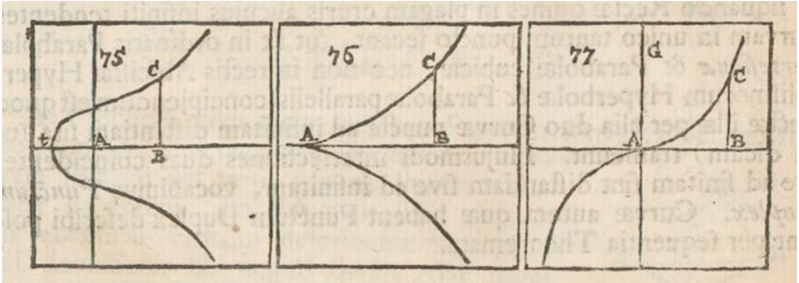









72
G
C
A
B
73
C
A
T
B
74
C
A
t
B


75
C
t
A
B
76
C
A
B
77
G
C
A
B

Vorstudien zur Topologie.

Von

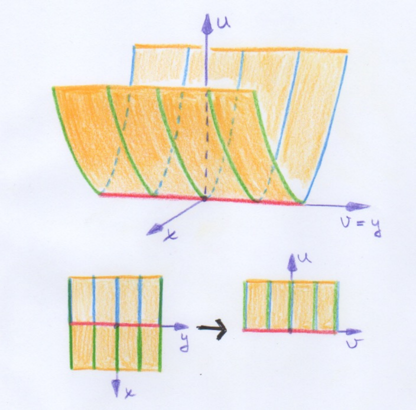
Johann Benedict Listing.

(Mit eingedruckten Holzschnitten.)

Wikimedia Commons. Provenance : ETH-Bibliothek Zürich, Bildarchiv

Un détail : Hassler Whitney à 28 ans

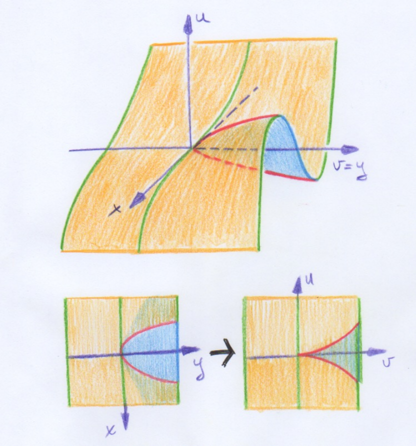
$$\begin{cases} u = x^2 \\ v = y \end{cases}$$



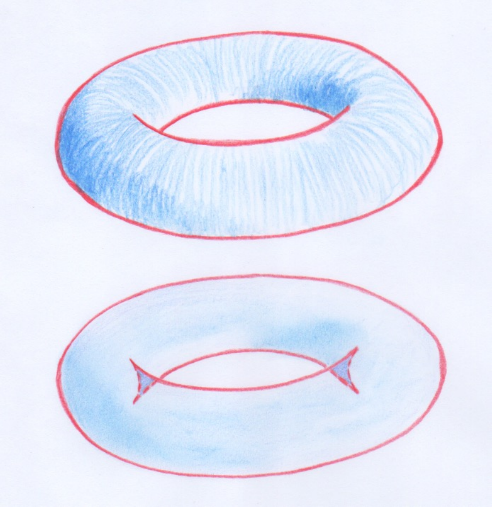
Hassler Whitney : *On singularities of mappings of Euclidean spaces. I. Mappings of the plane into the plane.*

Annals of Mathematics 62 No. 3 (1955), 374–410.

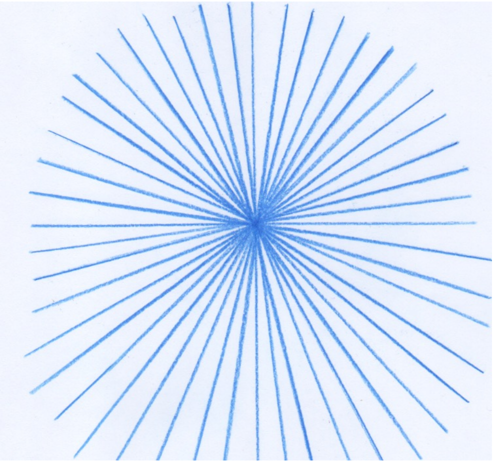
$$\begin{cases} u = xy - x^3 \\ v = y \end{cases}$$



Le **contour apparent à la source** est lisse, mais celui **au but** a un point de rebroussement.

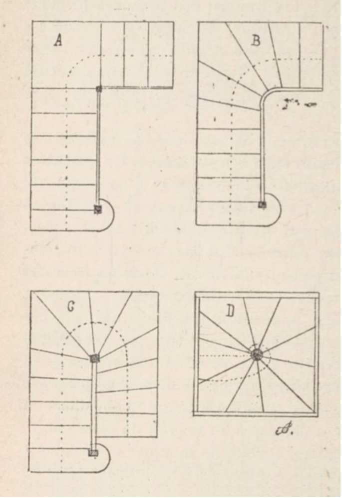


Les rayons cachent une surface

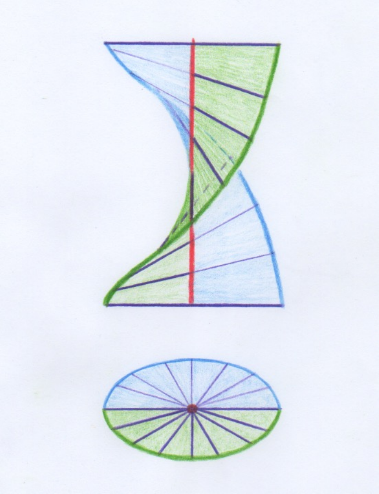


Vue latérale d'un escalier hélicoïdal

Vue du dessus d'un escalier hélicoïdal



Wikimedia Commons. Image du livre *Constructions rurales* de Jacques Danguy, 1913.



La droite du haut est la même que celle du bas !

Quelle surface obtient-on en les recollant ?

La bande de Möbius

IMAGES DES MATHÉMATIQUES
La recherche mathématique en mots et en images

Recherche

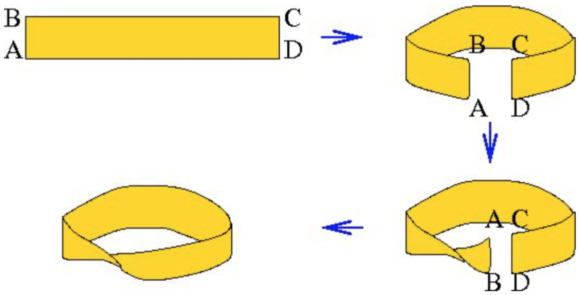
ACCUEIL | EN CE MOMENT | DIFFÉRENTES MATHÉMATIQUES | DOSSIERS | QUI SOMMES-NOUS ?

Objet du mois — Retour à la rubrique

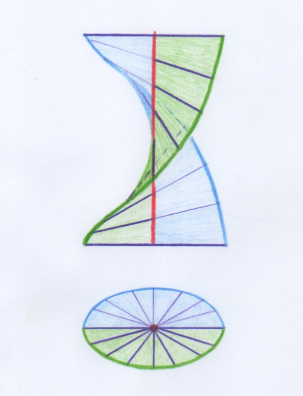
LA BANDE QUE « TOUT LE MONDE CONNAÎT »

Piste rouge Le *4 juin 2010* - Ecrit par Patrick Popescu-Pampu

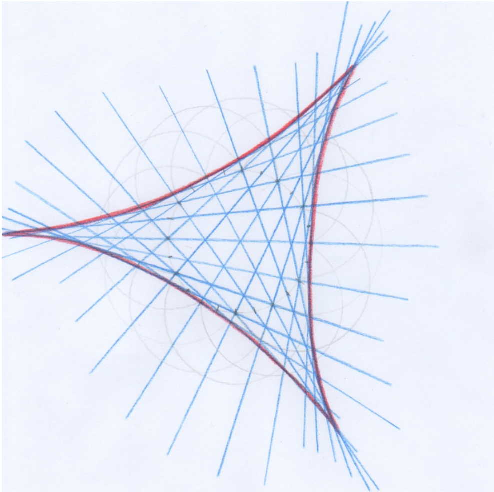
Voir les commentaires (2)



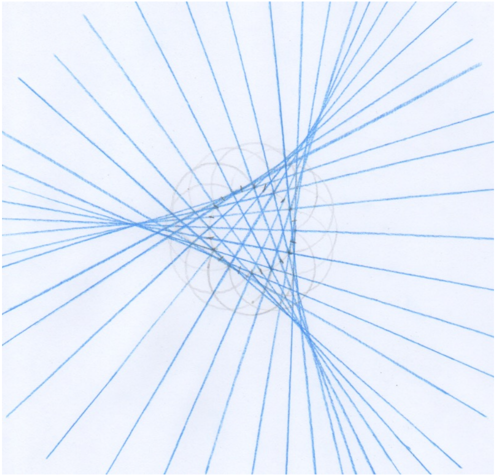
Revenons à l'application d'**éclatement** d'un point :



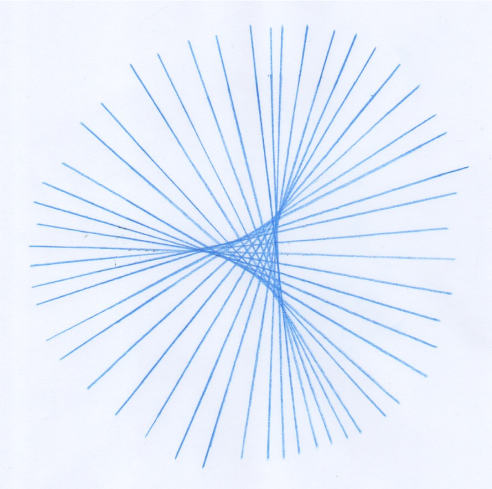
Whitney affirme que l'on peut déformer très peu cette application pour qu'il n'y ait plus que des plis et des fronces. Comment est-ce possible ?



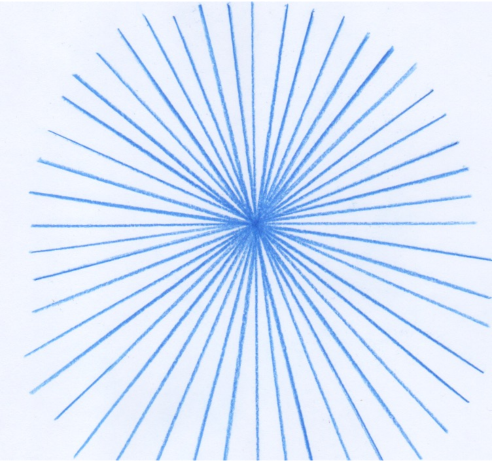
Le **contour apparent au but**.



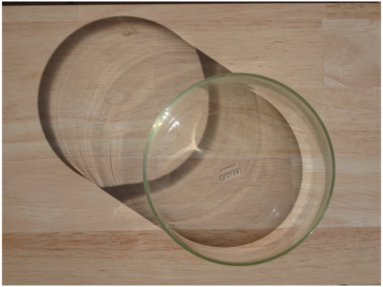
Rétrécissement



Et à la limite ...



Quand les droites sont des rayons de lumière



René Thom en 1949 et 1970

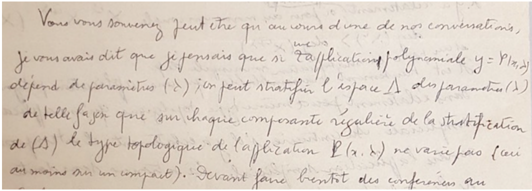
Wikimedia Commons. Provenance : Mathematische Forschungsinstitut Oberwolfach.

LA STABILITÉ TOPOLOGIQUE DES APPLICATIONS POLYNOMIALES[1]

par René Thom

Soient E, E' deux espaces euclidiens de dimension n, p respectivement, $(x_1, x_2, \ldots x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ deux systèmes de coordonnées pour E et E'. Une application F de E dans E' sera dite *polynomiale*, si elle s'exprime à l'aide d'équations de la forme: $y_j = P_j(x_i)$, $i \leqq n$, $j \leqq p$ où les P_j sont des polynômes en les variables x_i. L'espace E sera dit la *source*, E' le *but* de l'application F.

L'Enseignement Mathématique (2) 8 (1962), 24–3. Repris dans le Vol. II des *Œuvres mathématiques*, pp. 117–126.


Vous vous souvenez peut être qu'au cours d'une de nos conversations, je vous avais dit que je pensais que si une l'application polynomiale $y = P(x, \lambda)$ dépend de paramètres (λ) ; on peut stratifier l'espace Λ des paramètres (λ) de telle façon que sur chaque composante régulière de la stratification de (Λ) le type topologique de l'application $P(x, \lambda)$ ne varie pas (ceci au moins sur un compact). Devant faire bientôt des conférences au

"[...] **je pensais que si une application polynomiale dépend de paramètres, on peut stratifier l'espace des paramètres de telle façon que sur chaque composante régulière de la stratification le type topologique de l'application ne varie pas** *[...]."*

$$
\begin{gathered}
\mathbf{a}\, x^3 + \mathbf{b}\, x^2 y + \mathbf{c}\, x y^2 + \mathbf{d}\, y^3 \\
+\mathbf{e}\, x^2 + \mathbf{f}\, xy + \mathbf{g}\, y^2 \\
+\mathbf{h}\, x + \mathbf{i}\, y \\
+\mathbf{j} \\
= 0.
\end{gathered}
$$

“Il m’est apparu – **à ma grande surprise** *– qu’une application polynomiale dépendant de paramètres peut très bien ne pas avoir de stabilité topologique sur chacune des composantes de la stratification associée de l’espace des paramètres.”*

Ceci définit entre applications de E dans E' une relation d'équivalence ; on sait peu de choses sur l'ensemble des classes d'équivalence ainsi définies ; le but essentiel de ce papier est de donner l'exemple d'une application polynomiale P de E dans E', dépendant algébriquement d'un paramètre k, dont le type topologique *varie continuement* avec le paramètre k ; par là j'entends que deux applications correspondant à des valeurs différentes du paramètre t ne sont pas de même type topologique.

$$\begin{cases} U = [x\,(x^2+y^2-a^2) - 2a\,z\,y]^2 \cdot \\ \quad [(\mathbf{k}y+x)\,(x^2+y^2-a^2) - 2a\,z\,(y-\mathbf{k}x)]^2, \\ V = x^2+y^2-a^2, \\ W = z \end{cases}$$

On voit que l'image de l'application est contenue dans le demi-espace défini par :

$$U \geq 0.$$

Le bord de ce demi-espace est le plan d'équation :

$$U = 0.$$

La portion de l'image de l'application contenue dans ce bord fait partie du **contour apparent au but**.

$$\begin{cases} U = [x\,(x^2+y^2-a^2) - 2a\,z\,y]^2 \cdot \\ \quad [(ky+x)\,(x^2+y^2-a^2) - 2a\,z\,(y-kx)]^2, \\ V = x^2+y^2-a^2, \\ W = z \end{cases}$$

Regardons l'image réciproque de cette partie du contour apparent au but. Elle est définie par l'équation :

$$U(x,y,z) = 0.$$

C'est **une union de deux surfaces**, définies par les équations :

$$x\,(x^2+y^2-a^2) - 2a\,z\,y = 0,$$

$$(ky+x)\,(x^2+y^2-a^2) - 2a\,z\,(y-kx) = 0.$$

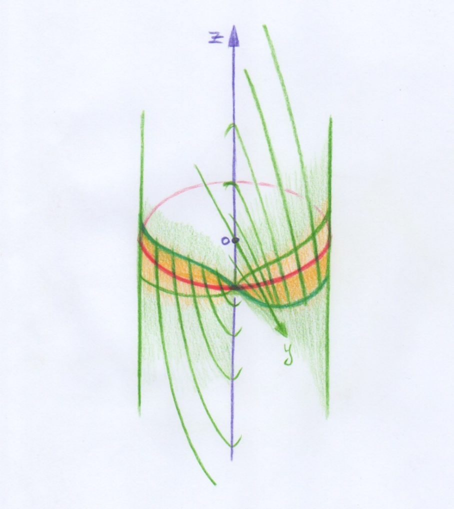
Elles forment une partie du **contour apparent à la source**.

Pour $k \neq 0$, les deux surfaces s'intersectent le long du cercle d'équations

$$\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 - a^2 = 0 \end{cases} .$$

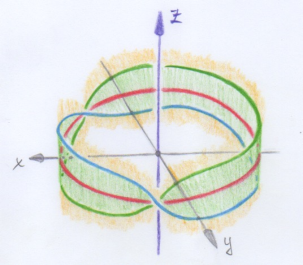
La seconde surface s'obtient **en faisant tourner la première surface autour de ce cercle, d'un angle qui dépend de k**.

Examinons d'abord la forme de la première surface.

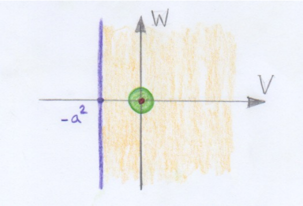


$$x\,(x^2 + y^2 - a^2) = 2a\,y\,z.$$

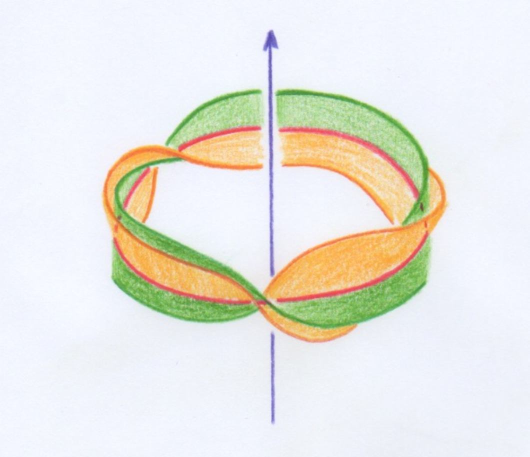
L'image de la bande centrale



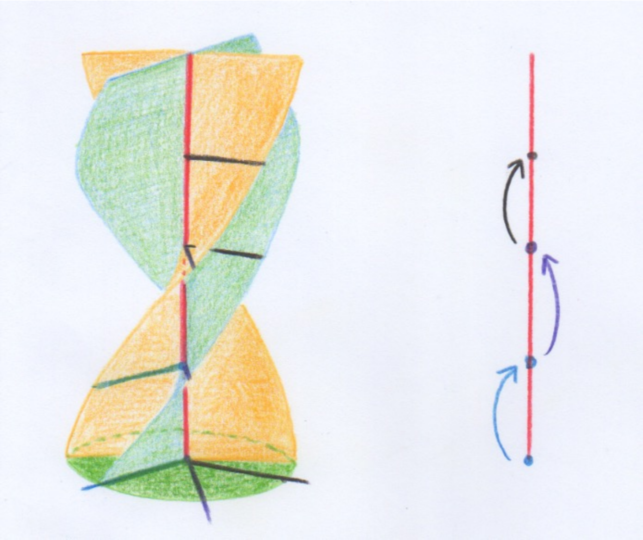
$$\begin{cases} V = x^2 + y^2 - a^2 \\ W = z \end{cases}$$



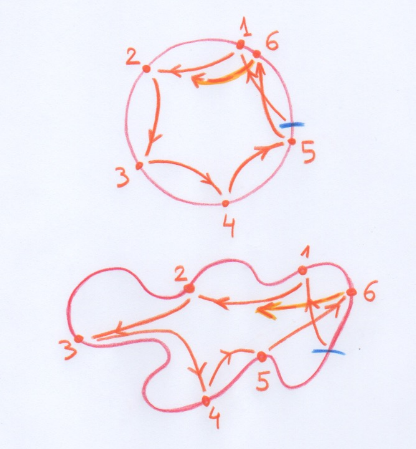
Regardons les deux bandes centrales simultanément

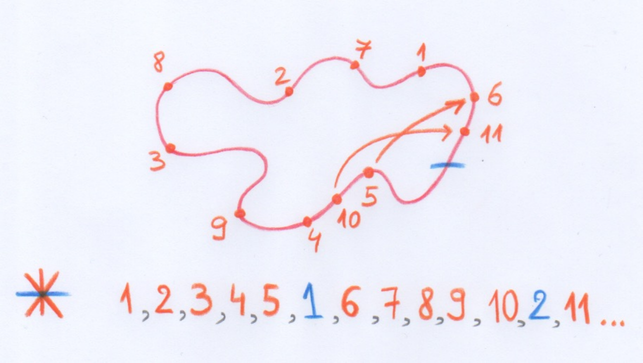


Un fragment de double bande centrale et son image



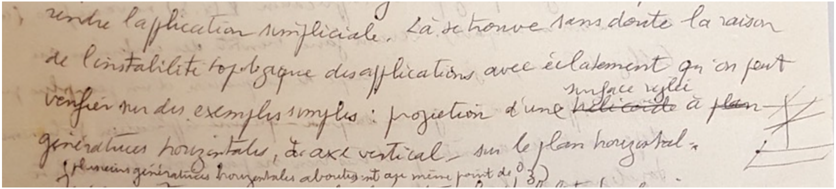
Dynamique rotationnelle

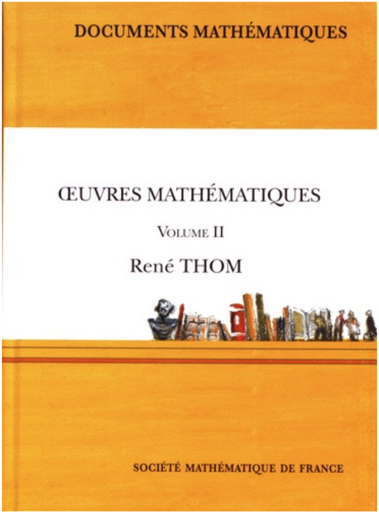




Cette suite bicolore a un sens topologique.
Elle permet de retrouver l'angle de rotation !

“[...] **l’instabilité topologique des applications avec éclatement** *[peut se vérifier] sur des exemples simples : projection d’une surface réglée à génératrices horizontales, d’axe vertical, sur le plan horizontal (***plusieurs génératrices horizontales aboutissant au même point de** Oz*).”*


entre l'application simpliciale. Là se trouve sans doute la raison de l'instabilité topologique des applications avec éclatement qu'on peut vérifier sur des exemples simples : projection d'une ~~hélicoïde~~ surface réglée à ~~plan~~ génératrices horizontales, d'axe vertical, sur le plan horizontal. (plusieurs génératrices horizontales aboutissant au même point de Oz)




André Haefliger


Marc Chaperon


Alain Chenciner


Jean Lannes

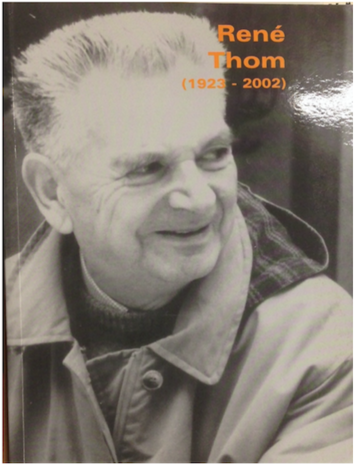

François Laudenbach

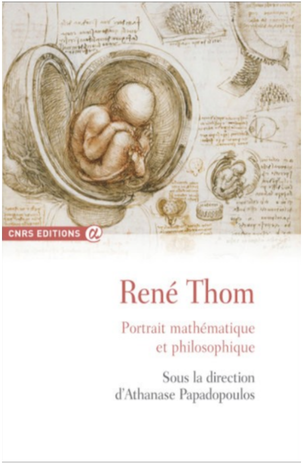

Jean Petitot


Bernard Teissier

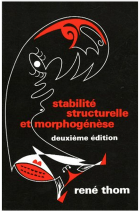

David Trotman

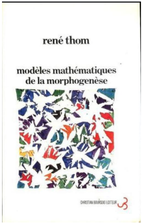

Pierre Vogel

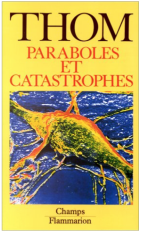

René
Thom
(1923 - 2002)

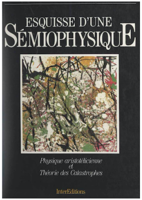

CNRS EDITIONS
René Thom
Portrait mathématique
et philosophique
Sous la direction
d'Athanase Papadopoulos

Les livres de René Thom









René Thom & Emile Noel la théorie des catastrophes

"Pensons au mythe platonicien de la caverne : comme les prisonniers dans la caverne, nous ne voyons que les reflets des choses et pour passer du reflet à la chose proprement dite, il faut augmenter la dimension de l'espace et avoir une source lumineuse qui dans le cas de Platon est le feu, le feu qui éclaire. *La théorie des catastrophes suppose justement que les choses que nous voyons sont seulement des reflets et que pour arriver à l'être lui-même il faut multiplier l'espace substrat par un espace auxiliaire et définir dans cet espace produit l'être le plus simple qui donne par projection son origine à la morphologie observée."*

René Thom : *Paraboles et catastrophes*. Flammarion, 1983. Chap. 2.

"Je dis simplement que si l'on réduit la science à n'être qu'un ensemble de recettes qui marchent, on n'est pas intellectuellement dans une situation supérieure à celle du rat qui sait que lorsqu'il appuie sur un levier, la nourriture va tomber dans son écuelle. La théorie pragmatiste de la science nous ramène à la situation du rat dans sa cage."

René Thom : *Prédire n'est pas expliquer*. Entretiens avec Émile Noël. Flammarion, 1993. Chap. 3.

Pourquoi ai-je choisi ce texte de Thom ?

- J'admire cette **apparition du dynamique dans le statique**.
- On y perçoit la pensée de Thom mue par **la vénérable quête de la description des formes possibles** (celles des applications).
- On y voit comment **un exemple pousse à créer un concept** (celui "d'application sans éclatement").
- On y voit **un questionnement ayant mené à développer une théorie** (celle des "stratifications", dont Whitney et Thom sont des pionniers).
- On connaît **une trace du chemin ayant mené au texte** (la lettre à Haefliger).
- Cela permet de montrer comment **des interrogations formulées habituellement dans une théorie peuvent avoir été présentes bien avant l'existence officielle de cette théorie et de son langage** (la classification topologique).

L'absence de l'interrogation initiale

Quelle interrogation a-t-elle mené Thom à cet article ?

Il le raconte à son ami :

> *"[...]* **je pensais** *que si une application polynomiale dépend de paramètres, on peut stratifier l'espace des paramètres de telle façon que sur chaque composante régulière de la stratification le type topologique de l'application ne varie pas [...]."*

Mais dans l'article il écrit seulement :

> Ceci définit entre applications de E dans E' une relation d'équivalence ; on sait peu de choses sur l'ensemble des classes d'équivalence ainsi définies ; le but essentiel de ce papier est de donner l'exemple d'une application polynomiale P de E dans E', dépendant algébriquement d'un paramètre k, dont le type topologique *varie continuement* avec le paramètre k ; par là j'entends que deux applications correspondant à des valeurs différentes du paramètre t ne sont pas de même type topologique.

Quels sentiments ont-ils accompagné cette recherche ?

Il manifeste son étonnement à son ami :

> *"Il m'est apparu –* **à ma grande surprise** *– qu'une application polynomiale dépendant de paramètres peut très bien ne pas avoir de stabilité topologique sur chacune des composantes de la stratification associée de l'espace des paramètres."*

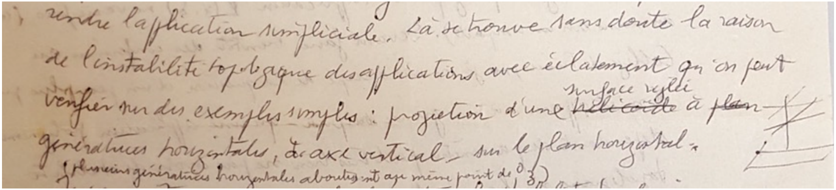
Quelles pensées ont-elles mené Thom à son interrogation initiale ?

Il ne le raconte ni à son ami, ni dans l'article.

C'est pour créer un tel contexte plausible que je suis remonté à la classification des cubiques par Newton. Suis-je sûr que c'est à de tels exemples que pensait Thom ? Non, mais **cela est plausible, car cela fait sens**.

Comment Thom est-il parvenu à son exemple ?

Il n'en dit rien dans l'article. Mais il en raconte un épisode à son ami :


rendre l'application simpliciale. Là se trouve sans doute la raison
de l'instabilité topologique des applications avec éclatement qu'on peut
vérifier sur des exemples simples : projection d'une ~~hélicoïde~~ surface réglée à ~~plan~~
génératrices horizontales, à axe vertical, sur le plan horizontal.
(plusieurs génératrices horizontales aboutissent au même point de O_3)

Quelles erreurs a-t-il fallu contourner ?

> *"[...] l'instabilité topologique des applications avec éclatement [peut se vérifier] sur des exemples simples : projection d'une surface réglée à génératrices horizontales,* **d'axe vertical***, sur le plan horizontal (plusieurs génératrices horizontales aboutissant au même point de Oz)."*

Cela n'est pas tout à fait correct : **il faut recourber l'axe vertical en un cercle**, sinon il n'y a pas d'éternel retour.

Probablement qu'après l'avoir compris, il a cherché :

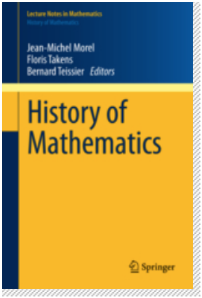
- à réaliser cette topologie en prenant deux surfaces algébriques ;
- puis à obtenir leur union comme un contour apparent à la source (d'une application polynomiale).

René Thom en donne lui-même une raison :

> *"Je dis simplement que si l'on réduit la science à n'être qu'***un ensemble de recettes qui marchent***, on n'est pas intellectuellement dans une situation supérieure à celle du rat qui sait que lorsqu'il appuie sur un levier, la nourriture va tomber dans son écuelle. La théorie pragmatiste de la science nous ramène à la situation du rat dans sa cage."*

D'autre part, avoir accès aux interrogations fondamentales permet de percevoir l'affinité entre théorèmes ou théories, leur croissance, l'inachèvement éternel de la quête du sens. Avoir interiorisé ces interrogations crée le désir de comprendre.

Pensez-y !



History of Mathematics Subseries

Series: » Lecture Notes in Mathematics

Series Ed.: **Popescu-Pampu**, Patrick

ISSN: 2193-1771

Tweet

ABOUT THIS SERIES | TITLES IN THIS SERIES

Providing captivating insights into facets of the recent history of mathematics, the volumes in this subseries of LNM explore interesting developments of the past 200 years or so of research in this science. Their aim is to emphasize the evolution of its intellectual discourse, the emergence of new concepts and problems, the ground-breaking innovations, the human interactions, and the surrounding events that all contributed to weave the backdrop of today's research and teaching in mathematics. These high-level and largely informal accounts will be of interest to researchers and graduate students in the mathematical sciences, in the history or the philosophy of mathematics, and to anyone who seeks to understand the historical growth of the discipline.