Riemann, une hypothèse de premier plan

Lorsqu'il s'éteignit à l'âge de 40 ans, en 1866, le mathématicien allemand Bernhard Riemann avait publié seulement six articles. Son œuvre complète, qui les rassemble au côté de textes posthumes, ne totalise même pas 500 pages. Cela semble bien peu, comparé aux dizaines de milliers de pages d'écrits mathématiques d'Euler ou Cauchy. Pourtant, ces textes font de Riemann l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps. En effet, il modifia profondément la manière de concevoir certaines des notions les plus importantes dans ce domaine.

Plusieurs de ces notions remontent aux *Eléments* d'Euclide. Cet ouvrage fondateur du style de présentation des preuves mathématiques contient, entre autres, des théories au sujet des figures simples du plan et des nombres entiers. Les nombres premiers y jouent le rôle d'espèces atomiques, d'abord parce qu'ils sont indécomposables, n'étant divisibles que par un et par eux-mêmes, ensuite parce que tout nombre entier s'écrit de manière unique comme produit de nombres premiers. Mais, à la différence des espèces d'atomes chimiques, il y a une infinité de nombres premiers. La preuve qu'en donna Euclide n'a jamais été dépassée en simplicité.

Y a-t-il un lien entre le plan et les nombres premiers ? Personne n'en avait trouvé avant que Riemann ne publie en 1859 un article intitulé « Sur le nombre de nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée ». Par exemple, combien de nombres premiers sont inférieurs à 1859 ? Il est possible de les compter, mais cela ne dirait rien sur la réponse concernant 2018. Riemann proposa une formule approchée d'une excellente précision, valable pour toute valeur de la grandeur donnée. Cependant, il ne savait prouver cette formule que sous l'hypothèse que toutes les solutions d'une certaine équation dont l'inconnue est cherchée parmi les points du plan sont situées sur deux droites spéciales. Cette « hypothèse de Riemann » au sujet de la « fonction zêta de Riemann » – l'expression figurant dans l'équation – n'a toujours pas été confirmée ou infirmée, en dépit de grands efforts. Elle est fascinante par ce rapprochement entre les nombres premiers et le plan.

Dans l'article de Riemann, le plan représentait géométriquement les nombres dits « complexes ». Ces nombres semblaient paradoxaux lors de leur invention au XVIe siècle, puisque en les élevant au carré on obtient parfois des nombres négatifs. Comme ils se montraient de plus en plus importants, ils furent progressivement apprivoisés. Au XIXe siècle on s'était habitué à les voir simplement comme coordonnées des points dans un plan. On avait aussi découvert que bon nombre d'équations ou de fonctions, dont l'inconnue était d'abord cantonnée à la droite des nombres réels, pouvaient mieux s'étudier si l'inconnue était cherchée dans tout le plan des nombres complexes. Par exemple, la fonction zêta de Riemann avait déjà été considérée par Euler pour une inconnue réelle, mais c'est Riemann qui comprit l'avantage que l'on pouvait tirer du passage au plan.

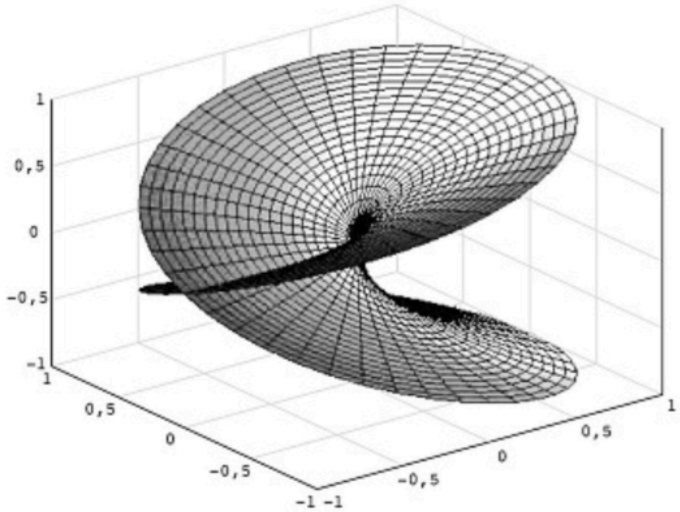

Image détaillée de la surface de Riemann de la fonction racine carrée.
ARCHIVES RBA

Riemann a aussi imaginé une nouvelle manière de concevoir le plan et l'espace de la géométrie d'Euclide. Il les engloba sous une notion très générale d'espace courbe de dimension quelconque. Il pensait que cette notion pouvait servir à mieux comprendre la structure du cosmos : *« Il faut donc, ou que la réalité sur laquelle est fondé l'espace forme une variété discrète, ou que le fondement des rapports métriques soit cherché en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent en lui »*, écrivait-il en 1854. Cette vision eut une profonde influence sur la théorie de la relativité générale d'Einstein de 1915 et, par la suite, sur le développement de la cosmologie. ■

PATRICK POPESCU-PAMPU, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LABORATOIRE PAUL-PAINLEVÉ DE L'UNIVERSITÉ DE LILLE, SPÉCIALISTE EN THÉORIE DES SINGULARITÉS