

¿Por qué estudiar singularidades ?

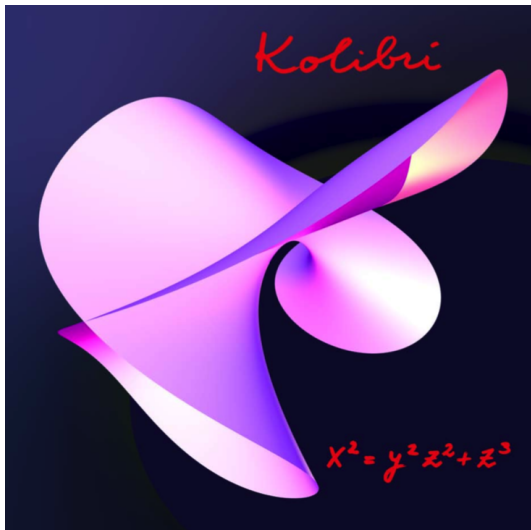
Patrick Popescu-Pampu

Professeur, Université de Lille 1, France

Real Academia de Ciencias, Madrid
27 de Octubre del 2011

Levantemos el vuelo

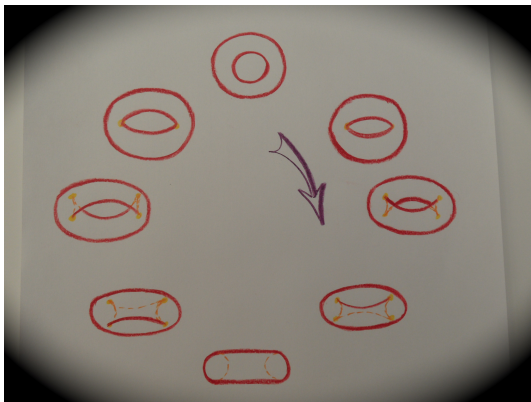
En la exposición **Imaginary** hay muchas imágenes de superficies con singularidades, como esta, de Hauser y Gann :



Esto es arte.
Pero cómo aparecen naturalmente las singularidades ?

Rotación de un toro translúcido

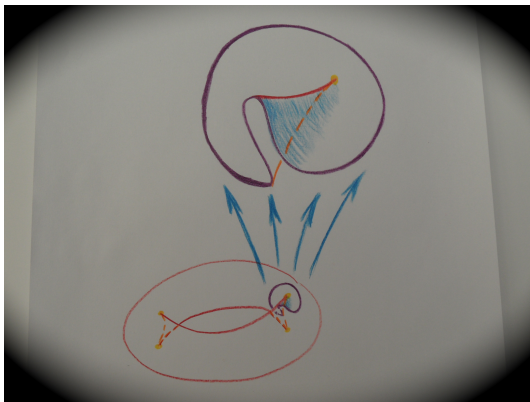
Lo que vemos de los objetos son contornos aparentes :



¿Veis los puntos singulares ? Son estables !

Un detalle

Acerquémonos de un punto singular :



Whitney demostró en 1955 que estos son todos los puntos singulares estables de un mapa de una superficie en otra superficie.

Resolución de una ecuación del tercer grado

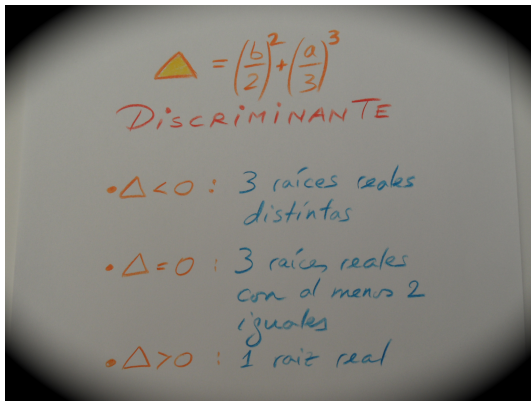
Vamos a ver como lo mismo sale del álgebra :

$$Z^3 + aZ + b = 0$$
$$Z = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}} +$$
$$+ \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

En amarillo está **el discriminante**.

El discriminante

El discriminante nos dice cual es la forma del conjunto de raíces :



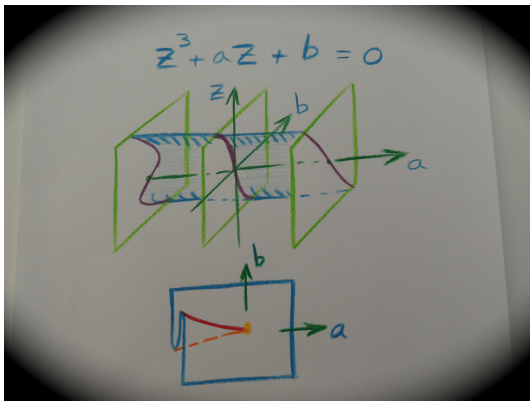
$\Delta = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3$

DISCRIMINANTE

- $\Delta < 0$: 3 raíces reales distintas
- $\Delta = 0$: 3 raíces reales con al menos 2 iguales
- $\Delta > 0$: 1 raíz real

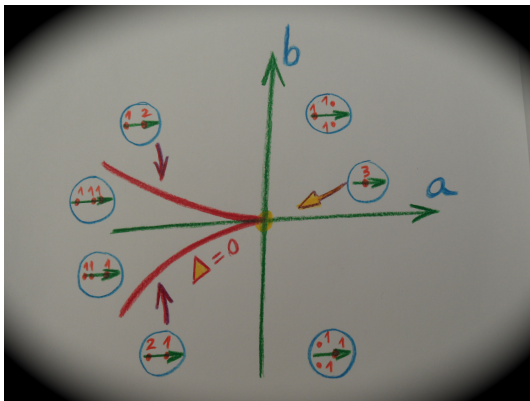
Interpretación geométrica

Miremos el lugar definido por la ecuación de partida en el espacio cuyas variables son la incognita z y los parámetros a, b :



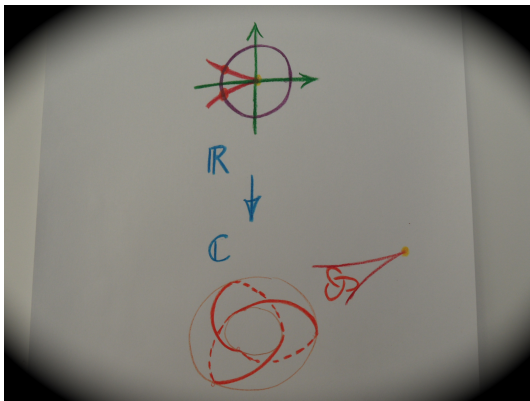
Cómo el discriminante discrimina las formas

A cada punto del espacio de parámetros le corresponde una configuración simétrica de tres puntos en el plano complejo de la incognita z :



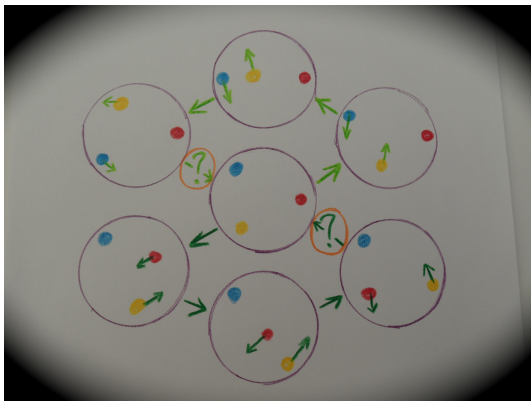
Complexificación

La fórmula de resolución de la ecuación del tercer grado introdujo los números complejos en el álgebra. La geometría también se enriquece por complexificación :



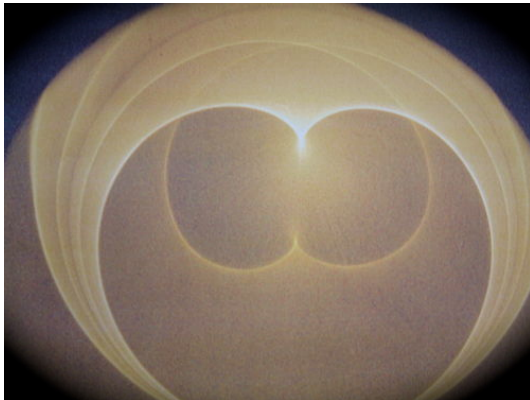
Monodromía

En el campo real el discriminante *separaba* el espacio de parámetros en trozos. Miramos entonces que pasa al **cruzarlo**. En el campo complejo miramos que pasa al **darle vueltas** :



Concentración de luz : cáusticas

Las **cáusticas** pueden ser de reflexión :

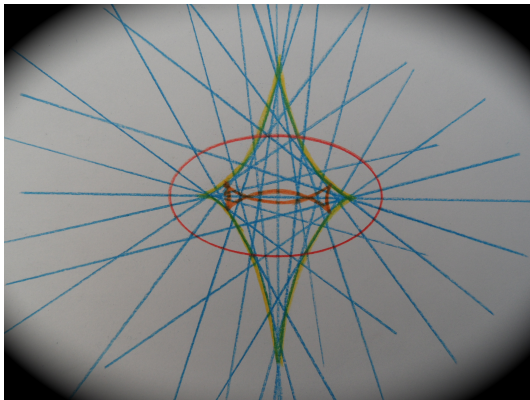


... o bien de refracción :



La cáustica de una elipse

Miremos la envolvente de las normales a una elipse :



Es la cáustica de una propagación de ondas desde la elipse como frente inicial.

Los objetos dependen de parámetros que pueden variar continuamente.

Para posiciones especiales de los parámetros, uno obtiene *objetos con singularidades*.

En el espacio de parámetros, les corresponde un *lugar discriminante*.

La jerarquía de sus singularidades refleja la jerarquía de degeneración de los objetos singulares parametrizados.

¡Gracias por su atención !