Amer. J. Math 107 (1985), 39–44.

QUELQUES REMARQUES SUR UN ARTICLE DE BOMBIERI CONCERNANT LE THÉORÈME DE DÉCOMPOSITION DE WEIL

By Pierre Dèbes

1. Introduction. Dans son article [2], Bombieri énonce un résultat qui précise la taille des facteurs qui apparaissent dans le théorème de décomposition de Weil [8]. Il en donne deux démonstrations ; la première, de nature algébrique, est basée sur la théorie des hauteurs [6] ; la seconde, de nature arithmétique, utilise son résultat sur les G-fonctions [1].

Nous allons ici corriger une inexactitude dans l'énoncé du "Main Theorem" de [2]. Nous adoptons les notations de Bombieri ; le théorème que nous allons démontrer et qui remplace le "Main Theorem" de [2] est le suivant :

Théorème Principal. *Soit $C_K \subset \mathbf{P}^n_K$ une courbe projective irréductible lisse définie sur un corps de nombres K, soit φ: $C_K \to \mathbf{P}^1_K$ une fonction rationnelle sur C_K définie sur K, et soit Q un pôle de φ rationnel sur K.*

Alors il existe une famille de nombres réels $(\Delta_v)_{v \in M_K}$, indexée par les places de K, vérifiant

$$0 < \Delta_v \leq 1 \qquad \textit{pour tout } v \in M_K$$

et

$$\Delta_v = 1 \qquad \textit{pour tout } v \in M_K \textit{ sauf un nombre fini}$$

telle que, pour tout $P \in C(K)$, on ait

$$(1) \quad \sum_{\substack{v \\ \delta_v(P,Q) < \Delta_v}} \log^+ |\varphi(P)|_v = -\frac{\mathrm{ord}_Q \varphi}{\deg \varphi} \log h(\varphi(P)) + O(\sqrt{\log h(\varphi(P))})$$

où les constantes intervenant dans le $O(\cdots)$ dépendent seulement du plongement $C_K \subset \mathbf{P}^n_K$ et de la fonction φ, mais pas de P.

Manuscript received August 27, 1984.

Voici un exemple dans lequel on ne peut pas choisir $\Delta_v = 1$ pour tout v. On prend $K = \mathbf{Q}$, $C_{\mathbf{Q}}$ est la courbe de $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ d'équation $X^2 + Y^2 + 2YZ = 0$, on choisit $\varphi(X, Y, Z) = (Z, X)$, et $Q = (0, 0, 1)$.

On a alors $\mathrm{ord}_Q \varphi = -1$, et $\deg \varphi = 2$. Considérons les points $P_h = (x_h, y_h, z_h)$, pour h entier positif, définis par

$$x_h = \frac{2^{h+1} 3^h}{2^{2h} + 3^{2h}}, \qquad y_h = -\frac{2 \cdot 3^{2h}}{2^{2h} + 3^{2h}}, \qquad z_h = 1.$$

Pour tout $h > 0$ on a $P_h \in C(\mathbf{Q})$; pour toute place v de $\mathbf{Q}$ on a

$$\delta_v(P_h, Q) = d_v^2(P_h, Q) = \max(|x_h|_v, |y_h|_v).$$

On a donc $\delta_v(P_h, Q) < 1$ si et seulement si $v = 2$ ou 3. Si l'on choisit $\Delta_v = 1$ pour tout v, le terme de gauche dans (1) est équivalent, quand h tend vers $+\infty$, à $h \log 6$, celui de droite à $h \log 3$.

Nous allons indiquer les points qu'il faut corriger dans les deux démonstrations de Bombieri pour obtenir le théorème principal. La première montrera alors que l'inégalité (1) est vraie à chaque fois que l'on choisit :

(2) $$0 < \Delta_v \leq \Delta_v^\circ \qquad \text{pour tout } v \in M_K$$

et

(3) $$\Delta_v = 1 \qquad \text{pour tout } v \in M_K \text{ sauf un nombre fini,}$$

où

$$\Delta_v^\circ = \min_{\substack{Q_1, Q_2 \in Z(\varphi) \cup P(\varphi) \\ Q_1 \neq Q_2}} c_v(Q_1, Q_2) \qquad \text{pour tout } v \in M_K,$$

$Z(\varphi)$ (resp. $P(\varphi)$) désignant l'ensemble des zéros (resp. des pôles) de φ.

2. Utilisation du théorème de décomposition de Weil. On reprend les arguments de [2] jusqu'à la page 299, ligne 7. A ce niveau, les conditions $W_v(P, Q) < 1$ et $v \in S$ ne permettent pas d'affirmer que $W_v(P, Q') \geq \delta > 0$ indépendamment de P.

On considère une famille $(\Delta_v)_{v \in M_K}$ de nombres réels vérifiant (2) et (3), et on modifie le lemme p. 299 de [2] de la manière suivante :

LEMME. *Si* $W_v(P, Q) < \Delta_v$, *on a*

$$\log |\varphi(P)|_v = (\mathrm{ord}_Q \varphi) \log W_v(P, Q) + O_v(1),$$

où $O_v(1)$ est une fonction de P, bornée par une quantité ne dépendant que de C_K et de φ et nulle pour tout $v \in M_K$ sauf un nombre fini. Précisément, on a $O_v(1) = 0$ pour les places v de K telles que $c_v(\varphi) = c'_v(\varphi) = \Delta_v = 1$.

Comme Bombieri, nous prenons $W_v(P, Q) = \min(1, \delta_v(P, Q))$. On déduit alors du lemme :

$$(4) \qquad \sum_{\substack{v \\ \delta_v(P,Q)<\Delta_v}} \log |\varphi(P)|_v = (\mathrm{ord}_Q \varphi) \sum_{\substack{v \\ \delta_v(P,Q)<\Delta_v}} \log \delta_v(P, Q) + O(1).$$

On obtient donc

$$(5) \qquad \sum_{\substack{v \\ \delta_v(P,Q)<\Delta_v}} \log |\varphi(P)|_v = (\mathrm{ord}_Q \varphi) \sum_{\substack{v \\ \delta_v(P,Q)<1}} \log \delta_v(P, Q) + O(1),$$

ce qui donne (voir [2] pour les détails intermédiaires)

$$(6) \quad \sum_{\substack{v \\ \delta_v(P,Q)<\Delta_v}} \log |\varphi(P)|_v = -\frac{\mathrm{ord}_Q \varphi}{\deg \varphi} \log h(\varphi(P)) + O(\sqrt{\log h(\varphi(P))}).$$

Enfin, du lemme on déduit

$$(7) \qquad \sum_{\substack{v \\ \delta_v(P,Q)<\Delta_v}} \log^+ |\varphi(P)|_v = \sum_{\substack{v \\ \delta_v(P,Q)<\Delta_v}} \log |\varphi(P)|_v + O(1),$$

ce qui, joint à (6), fournit le résultat annoncé, les constantes intervenant dans les $O(\cdots)$ de (4), (5), (6) et (7) ne dépendant que de $C_K \subset \mathbf{P}_k^n$ et de φ.

Remarques. La relation (7) montre que si la famille $(\Delta_v)_{v \in M_K}$ est choisie vérifiant (2) et (3), alors l'inégalité (1) est encore valide si on y remplace $\log^+$ par log.

Dans l'exemple que nous avons considéré, on a

$$\Delta_v^\circ = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad v \neq 2 \\ \frac{1}{2} & \text{pour} \quad v = 2, \end{cases}$$

et Δ_v° est la valeur maximale de Δ_v qui donne l'inégalité (1).

3. G-fonctions. L'exemple que nous avons donné dans l'introduction montre que l'affirmation de [2] p. 304, lignes 4-5-6 : "we can replace the condition $v \in S$ by the condition $\delta_v(P, Q) < 1$ and introduce a further remainder term $O(1)$" n'est pas correcte.

Reprenons donc la seconde démonstration de Bombieri p. 303 ligne 16. Choisissons pour S l'ensemble des places v de K telles que

$$|\varphi(P)|_v > (\min(1, r_v(Y)))^{-1}$$

et telles que l'égalité $Y_1(\xi) = \psi(P)$ soit valide dans K_v. En utilisant le résultat de Bombieri sur les G-fonctions [1] on obtient :

$$-(\deg \varphi) \sum_{v \in S} \log^+ |\varphi(P)|_v + \log h(\varphi(P)) \geq -A\sqrt{\log h(\varphi(P))}. \tag{8}$$

Il s'agit maintenant de remplacer la condition $v \in S$ par une condition de la forme $\delta_v(P, Q) < \Delta_v$, où $(\Delta_v)_{v \in M_K}$ est une famille de nombres réels satisfaisant aux conditions demandées dans le théorème principal.

Introduisons le polynôme F irréductible dans $K[X, Y]$, unique à un élément de K^* près, vérifiant

$$F(z, \psi) = 0.$$

Si $|z(P)|_v < r_v(Y)$, on a dans K_v :

$$F(z(P), \psi(P)) = F(z(P), Y_1(z(P))) = 0.$$

Le lemme suivant va nous permettre de conclure, sous certaines conditions, que

$$\psi(P) = Y_1(z(P)).$$

LEMME. *Soient $F = \sum_{i,j} f_{i,j} X^i Y^j$ un polynôme dans $K[X, Y]$ tel que*

$$F(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad F'_Y(0, 0) \neq 0$$

et v une place de K. On définit un nombre réel β_v de la manière suivante

$$\beta_v = \begin{cases} |F'_Y(0, 0)|_v / h_v(F) & \text{si } v \text{ est finie} \\ |F'_Y(0, 0)|_v / 2(1 + \deg_X F)(\deg_Y F)^2 h_v(F) & \text{si } v \text{ est archimédienne,} \end{cases}$$

où $h_v(F) = h_v((f_{ij})_{i,j})$. *Soient* ξ, η_1, η_2 *trois éléments de* K_v *vérifiant*

a) $F(\xi, \eta_1) = F(\xi, \eta_2) = 0$
b) $|\xi|_v < \beta_v$
c) $|\eta_i|_v < \beta_v$ pour i = 1, 2.

Alors $\eta_1 = \eta_2$.

La démonstration est élémentaire : si $\eta_1 \neq \eta_2$, en utilisant a), on obtient

$$0 \neq F'_Y(0, 0) = f_{01} = -(\sum_{\substack{j\geq 2\\ i\geq 0}} f_{ij}\xi^i(\eta_2^{j-1} + \eta_2^{j-2}\eta_1 + \cdots + \eta_1^{j-1})$$

$$+ \sum_{i\geq 1} f_{i1}\xi^i)$$

ce qui, en utilisant b) et c), conduit à une contradiction.

On peut choisir ψ de telle façon que le polynôme F auquel on s'intéresse vérifie

$$F(0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad F'_Y(0, 0) \neq 0\ ;$$

il suffit que ψ soit un élément primitif de $K(C)$ sur $K(z)$, soit une uniformisante en Q, et n'ait ni zéro ni pôle aux autres zéros de z.

Soit $(\Delta_v)_{v\in M_K}$ une famille de nombres réels vérifiant

$$0 < \Delta_v \leq 1 \qquad \text{pour tout } v \in M_K,$$

$$\Delta_v = 1 \qquad \text{pour tout } v \in M_K \text{ sauf un nombre fini},$$

et telle que la condition $\delta_v(P, Q) < \Delta_v$ implique

$$|z(P)|_v < \min(\beta_v, \tau_v, r_v(Y)) \quad \text{et} \quad |\psi(P)|_v < \beta_v,$$

où $(\tau_v)_{v\in M_K}$ est une famille de nombres réels tels que, pour tout x dans K_v vérifiant $|x|_v < \min(\tau_v, r_v(Y))$, on ait $|Y_1(x)|_v < \beta_v$. Il est facile de montrer qu'une telle famille $(\Delta_v)_{v\in M_K}$ existe.

On déduit alors du lemme que la condition $\delta_v(P, Q) < \Delta_v$ implique $v \in S$, ce qui, en utilisant (8), donne

$$\sum_{\substack{v \\ \delta_v(P,Q)<\Delta_v}} \log^+ |\varphi(P)|_v \leq \frac{1}{\deg \varphi} \log h(\varphi(P)) + O(\sqrt{\log h(\varphi(P))}),$$

si $Q \in C(K)$ est un pôle simple de φ.

La fin de la démonstration est inchangée par rapport à celle de Bombieri, à ceci près qu'il faut remplacer dans les formules de [2] :

$$\sum_{\substack{v \\ \delta_v(P,Q)<1}} \quad \text{par} \quad \sum_{\substack{v \\ \delta_v(P,Q)<\Delta_v}}$$

Indiquons pour conclure qu'on peut également démontrer le théorème principal à partir d'un théorème que nous avons donné dans [3] et qui généralise un résultat de Sprindzuk [7]. Dans ce théorème, comme dans le résultat de Bombieri sur les G-fonctions, les constantes, dont nous donnerons une valeur explicite dans [4], ne dépendent pas du corps K. C'est une remarque importante : en effet, dans le cas contraire, à cause du résultat récent de Faltings [5], le théorème principal n'aurait d'intérêt que pour les courbes de genre $g < 2$.

INSTITUT HENRI POINCARÉ

REFERENCES

[1] E. Bombieri, On G-functions, In *Recent Progress in Analytic Number Theory*, H. Halberstam and C. Hooley ed., Academic Press, 1981, vol. 2, 1-67.

[2] E. Bombieri, On Weil's "théorème de décomposition," *Amer. J. Math.*, **105** (1983), 295-308.

[3] P. Dèbes, Spécialisations de polynômes, Math. rep. Acad. Sci., Royal Soc. Canada, vol. V, n° 6, Dec. 1983.

[4] P. Dèbes, Valeurs algébriques de fonctions algébriques et théorème d'irréductibilité de Hilbert. Thèse 3eme cycle, Univ. Paris VI (1984).

[5] G. Faltings, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, *Invent. Math.*, **73** (1983), 349-366.

[6] S. Lang, *Fundamentals of Diophantine Geometry*. Springer-Verlag, 1983.

[7] V. G. Sprindzuk, Arithmetic specializations in polynomials, *J. reine angew. Math.*, **340** (1983), 26-52.

[8] A. Weil, Arithmetic on algebraic varieties, *Annals of Math.*, **53** (1951), 412-444.