Université de Lille **Année universitaire 2016/2017**

M1 MAS/IM **Optimisation Convexe**

FEUILLE D'EXERCICES 1 : Ensembles et fonctions convexes

Exercice 1 Soient $B = \mathbb{R}^p, B_1 = \mathbb{R}^q, B_2 = \mathbb{R}^n$. Montrer les propriétés suivantes

1. Si $C_1, C_2 \subset B$ sont des convexes alors l'ensemble $C_1 + C_2 = \{x + y : \quad x \in C_1, y \in C_2\}$ est convexe.
2. Soient $C_1 \subset B_1$, $C_2 \subset B_2$ des ensembles convexes. Alors le produit cartésien
$$C_1 \times C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \quad x \in C_1, y \in C_2 \right\}$$
est convexe.
3. Soit $C \subset B_1 \times B_2$ un convexe. Alors $D = \left\{ x \in B_1 : \quad \exists y \in B_2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in C \right\}$ est convexe.
4. Si $C \subset B$ est un convexe alors $\mathrm{Int}(C)$ est un convexe et $\mathrm{Clos}(C)$ est un convexe.
5. Un ellipsoide $\mathcal{E}$ est défini par
$$\mathcal{E} = \{Ax + x_0 : \quad \| x \|_2 \leq 1\} = \left\{ x : \quad (x - x_0)^T E^{-1} (x - x_0) \leq 1 \right\},$$
avec A une matrice symétrique définie positive et $E = A^2$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un convexe.
6. Soit U un convexe de $\mathbb{R}^n$. Alors
$$K = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \quad x \in tU \text{ pour } t > 0\} \cup \{0\}$$
est un cône convexe.
7. Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un convexe , $x_1, x_2, \cdots, x_k \in C$, $\theta_1, \cdots, \theta_k \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \theta_i = 1$. Monter que $\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_k x_k \in C$.
8. Montrer que C est un convexe ssi l'intersection avec toute droite est un convexe.
9. Supposons que C vérifie la propriété de convexité du point milieu, i.e., $\forall a, b \in C \quad \frac{1}{2}(a+b) \in C$. Montrer que si C est de plus fermé alors C est convexe.

Exercice 2 Caractérisation des sous-espaces affines

1. Soit $C \subset \mathbb{R}^d$ et on note $C - x = \{y - x, \quad y \in C\}$. Montrer les équivalences suivantes:

   C sous-espace affine $\Leftrightarrow \quad \forall x \in C : \quad C - x$ est un sous-espace vectoriel $\Leftrightarrow \quad \exists x^* \in C :$ $C - x^*$ est un sous-espace vectoriel.

2. Montrer que $C \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-espace affine ssi

$$\exists A \in \mathbb{R}^{d\times p} \quad \exists x_0 \in \mathbb{R}^d : \quad C = \{Ay + x_0, \quad y \in \mathbb{R}^p\}.$$

   C est un sous-espace affine ssi

$$\exists B \in \mathbb{R}^{q\times d} \quad \exists a \in \mathbb{R}^q : \quad C = \left\{x \in \mathbb{R}^d : \quad Bx = a\right\}$$

<u>Exercice 3</u> Soit $C \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble convexe.

1. Si $h : C \to C_2 \subset \mathbb{R}$ est convexe et $g : C_2 \to \mathbb{R}$ est convexe et croissante, alors $f = g \circ h$ est convexe.
2. Soit $f : \quad C \to \mathbb{R}$. On définit <u>l'épigraphe de f</u> par

$$\text{epi}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \quad x \in C, f(x) \leq r \right\}.$$

   Montrer que f convexe $\Leftrightarrow$ epi(f) est convexe.

3. Soit f une fonction convexe. Alors $\forall r \in \mathbb{R}$, <u>l'ensemble de niveau</u>

$$\{x \in C : \quad f(x) \leq r\} \text{ est un convexe.}$$

<u>Exercice 4</u> Soit $C \in \mathbb{R}^n$ l'ensemble solution de l'inégalité quadratique

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad x^T Ax + b^T x + c \leq 0\right\}$$

avec $A \in S^n, b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. Montrer que C est convexe si A semi-définie positive.

<u>Exercice 5</u> Dérivées de fonctions dans $\mathbb{R}^n$

1. Soit $f(x) = x^T Hx + hx + \gamma$, avec $H \in S^d$, $h \in \mathbb{R}^{1\times d}$. Montrer que

$$\nabla f(x) = 2x^T H + h, \quad \nabla^2 f(x) = 2H.$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^q, f(x) = Ax + b$. Montrer que $\nabla f(x) = A$ et $\nabla^2 f(x) = 0$.
3. Soit $f(x) = h(Ax + b)$. Montrer que $\nabla f(x) = \nabla h(Ax + b)A$.
4. Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{i=1}^m [r_i(x)]^2$, où $r_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont des fonctions deux fois dérivables. Calculer $\nabla g(x)$ et $\nabla^2 g(x)$.

<u>Exercice 6</u> Soit S^n l'ensemble des matrices symétriques muni du produit scalaire défini par $\langle A, B\rangle =$tr$(A^T B)$.

1. Montrer que S^n_+ est un cône convexe fermé et que $S^n_{++} =$Int(S^n_+).
2. Montrer que le cône polaire de S^n_+ est $-S^n_+$.

Exercice 7 **Fonctions convexes de plusieurs variables**

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ convexe, ouvert, $f : C \to \mathbb{R}$. Pour $x, y \in C$, soit $\phi_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\phi_{x,y}(\lambda) = f(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y) - \lambda \cdot f(x) - (1-\lambda) \cdot f(y)$.

(a) Montrer l'équivalence : f convexe sur $C \iff \phi_{x,y} \leq 0 \; \forall x, y \in C \iff \phi_{x,y}$ convexe $\forall x, y \in C$.

(b) Soit f convexe, et differentiable en $y \in C$, avec gradient $\nabla f(y)$ (vecteur ligne). En discutant $\phi'_{x,y}(0+)$, montrer que $\nabla f(y) \cdot (x - y) \leq f(x) - f(y) \; \forall x \in C$.

(c) Soit $f \in \mathcal{C}^1(C)$. Montrer l'équivalence

$$f \text{ convexe} \quad \iff \quad \nabla f(\overline{y}) \cdot (\overline{x} - \overline{y}) \leq f(\overline{x}) - f(\overline{y})$$

(considérer le choix $\overline{y} = \lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot y$, $\overline{x} \in \{x, y\}$).

(d) Soit $f \in \mathcal{C}^2(C)$. Montrer que
(i) f convexe $\iff$ le *Hessien* $\nabla^2 f$ est semi défini positif.
(ii) f strictement convexe $\Longleftarrow \nabla^2 f$ est défini positif.

Exercice 8 Soit A un ensemble et $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ des fonctions convexes $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Montrer que la fonction $x \longrightarrow \sup_{\alpha \in A} f_\alpha(x)$ est convexe.

Exercice 9 Soit $A \in S^n$ et $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow f(x) = \frac{x^T A x}{\|x\|^2}$. Calculer $\nabla f(x)$ en $x \neq 0$ et le comparer à la projection orthogonale de Ax sur le sous-espace H_x orthogonal à x