Université Lille 1 **2012/2013**
L1 MASS

Analyse

–

FICHE 4 : DÉRIVABILITÉ

Exercice 1 Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on précisera leurs domaines de définitions).

1. $f(x) = x^2$,
2. $g(x) = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 4$,
3. $h(x) = (2x+3)(3x-7)$,
4. $i(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$,
5. $j(x) = 4x^2 - 3x + 1$,
6. $k(x) = \frac{2x+5}{3x-1}$,
7. $l(x) = (2x^2+3x+1)^5$
8. $m(x) = (\sqrt{x}+1)(x^2-2)$
9. $n(x) = \sqrt{x}\,(1-\tan x)$,
10. $o(x) = \frac{3x^2-4x+1}{2x-3}$,
11. $p(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{2})$,
12. $q(x) = (x(x-2))^{1/3}$,
13. $r(x) = \sin(\frac{1}{x})$,
14. $s(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x^2+1}}$,
15. $t(x) = \ln(1+e^x)$,
16. $u(x) = \sqrt{1 + x^2 \sin^2 x}$,
17. $v(x) = \frac{\exp(1/x)+1}{\exp(1/x)-1}$,
18. $w(x) = \ln(\frac{1+\sin(x)}{1-\sin(x)})$.

Exercice 2 Étudier la dérivabilité au point x_0 de f dans les cas suivants :

1. $x_0 = 0$ et $f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$, si $x \neq 0$; $f(0) = 0$;
2. $x_0 = 0$ et $f(x) = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}$, si $x \neq 0$; $f(0) = 0$;
3. $x_0 = 1$ et $f(x) = \frac{|x|\sqrt{x^2-2x+1}}{x-1}$, si $x \neq 1$; $f(1) = 1$.

Exercice 3 Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des applications suivantes :

$$f : x \mapsto x|x|, \qquad g : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}, \qquad h : x \mapsto \frac{1}{1+|x|}.$$

Exercice 4 Prolonger par continuité en 0 et étudier la dérivabilté de

1. $f(x) = \sqrt{x}\ln|x|$.
2. $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 5 Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ de manière à ce que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \sqrt{x} \quad \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad f(x) = ax^2 + bx + 1 \quad \text{si } x > 1$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 6 Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \text{ si } x < 0 \\ x \mapsto ax^2 + bx + c \text{ sinon} \end{cases}$
Déterminer a, b, c pour que f soit C^2 (et C^3 ?).

Exercice 7 Etudier la fonction $f : x \mapsto x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbb{R}$ et en déduire que l'équation $x^5 - 5x + 1 = 0$ a trois solutions réelles.

Exercice 8 En appliquant le théorème des accroissements finis, donner un majorant de l'erreur comise lorsque l'on effectue les approximations suivantes :

$$\text{a. } \sqrt{10001} \approx 100; \qquad \text{b. } \cos 1 \approx \frac{1}{2}; \qquad \text{c. } \frac{1}{0,999^2} \approx 1.$$

Exercice 9 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |\sin x| \leq |x|,$$
$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \qquad 1 - \cos x \leq x \sin x,$$

Exercice 10 Par application du théorème des accroissements finis à $f(x) = \ln x$ sur $[k, k+1]$ montrer que $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$. En déduire que $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.

Exercice 11 Soit $a \in \mathbb{R}^*$ fixé.
1. En appliquant le théorème des acroissements finis à la fonction exponentielle entre 0 et a, montrer que $e^a - 1 - a \geq 0$.
Soit $k = 2\frac{e^a-1-a}{a^2}$ et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = e^t - 1 - t - k\frac{t^2}{2}$.
2. Montrer qu'il existe $b \in]0, a[$ si $a > 0$ ou dans $]a, 0[$ si $a < 0$ tel que $f'(b) = 0$.
3. Montrer qu'il existe $c \in]0, b[$ si $a > 0$ ou dans $]b, 0[$ si $a < 0$ tel que $f''(c) = 0$.
4. Calculer f'' et en déduire que $k = e^c$.
5. Montrer que $0 \leq e^a - 1 - a \leq \frac{a^2}{2}e^{|a|}$.

Exercice 12

1. Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $\dfrac{1}{x+1} < \log(x+1) - \log(x) < \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$: $\log(n+1) < 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} < 1 + \log(n)$.
3. Posons $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \log(n)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.

Exercice 13 Soit $a \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \cos u_n$.
1. Montrer que u_2 appartient à $[0, 1]$ puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, u_n appartient à $[0, 1]$.
2. Soit $g : [0, 1] \to [0, 1]$ définie par $g(x) = \cos x - x$.
2.a. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0, 1]$ tel que $g(\alpha) = 0$.
2.b. En étudiant les variations de g, montrer que α est unique.
3. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, qu'elle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. En appliquant le théorème des accroissements finis à f, montrer qu'il existe $k \in]0, 1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on ait $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, on a $|u_n - \alpha| \leq k^{n-2}|u_2 - \alpha|$ et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Exercice 14 Pour tout $x \in]1, +\infty[$ on pose $f(x) = x\ln(x) - x$. Montrer que f est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-1, +\infty[$. On pose $g = f^{-1}$ l'application réciproque de f. Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

Exercice 15 **1.** Démontrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, Arcsin x + Arccos $x = \frac{\pi}{2}$ (On pourra étudier la fonction $x \mapsto$ Arcsin x + Arccos x...)
2. Démontrer que Arctan x + Arctan$\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$ et Arctan x + Arctan$\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$ si $x < 0$ (On pourra étudier la fonction $x \mapsto$ Arctan x + Arctan$\frac{1}{x}$...)

Exercice 16

1. Simplifier $\arctan \frac{1-x}{1+x}$.
2. Simplifier $\arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.
3. Simplifier $\arctan \frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$.
4. Simplifier $\arctan \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} + \arctan\left(\sqrt{1+x^2} - x\right)$.
5. Simplifier $\arctan \frac{1}{2x^2} - \arctan \frac{x}{x-1} + \arctan \frac{x+1}{x}$.

Exercice 17 Montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad |\arcsin x| \leq \left|\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right|.$$