Université Lille 1 **2012/2013**
L1 MASS

Analyse

–

FICHE 3 : FONCTIONS RÉELLES

Exercice 1 1. Donner les valeurs des fonctions arccos et arcsin en $-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}$ et 1.
2. Donner les valeurs de la fonction arctan en -1, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $\sqrt{3}$.

Exercice 2 Préciser le domaine de validité des expressions suivantes puis les simplifier :

$$\text{Arcsin}(\sin(x)), \quad \text{Arccos}(\cos(x)), \quad \cos(\text{Arccos}(x)), \quad \sin(\text{Arccos}(x)).$$

Exercice 3 Résoudre les inéquations suivantes

1. $\text{Arcsin}(x) < 0$.
2. $2\text{Arccos}(x) - \pi \geq 0$.
3. $2\text{Arctan}(x) - \pi > 0$.
4. $|4\text{Arcsin}(x)| \leq \pi$.

Exercice 4

1. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = 1$.
2. Démontrer que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}(\sqrt{1+x+x^2}-1) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 5 Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2\,|x|}{x}$ *b*) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+2\,|x|}{x}$ *c*) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3\,x+2}$

d) $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ *e*) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ *f*) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-3}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ *h*) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n-1}$ *i*) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+-3x^2+5x-3}{4x^4+x^2+x-6}$

Exercice 6 Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1}-x$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{1+\dfrac{1}{x}} - \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}$ f) $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\sqrt{1+x^2}-x)$

Exercice 7 On rappelle les limites : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.
Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}.\sin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{\sin 3x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin 2x}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{\tan x}{\cos^2 x - 1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - \sin x}{\sin^3(\frac{x}{2})}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}$

Exercice 8 Déterminer les limites suivantes, en justifiant vos calculs.

$$\text{a)} \lim_{x\to 0^+} \frac{x+2}{x^2\ln x} \qquad \text{b)} \lim_{x\to 0^+} 2x\ln(x+\sqrt{x}) \qquad \text{c)} \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-2x^2+3}{x\ln x}$$

$$\text{d)} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{x+2} \qquad \text{e)} \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(3x+1)}{2x} \qquad \text{f)} \lim_{x\to +\infty} (x\ln x - x\ln(x+2))$$

Exercice 9 **1.** Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & E(x) \end{array} \right.$.

1.a. Tracer la représentation graphique de f.

1.b. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Sinon, déterminer les points de $\mathbb{R}$ où f est continue.

2. Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{array}{l} \sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0, \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{array} \end{array} \right.$

2.a. Résoudre pour $x > 0$ l'équation $g(x) = a$ lorsque $a = 0$, $a = 1$ et $a = -1$.

2.b. Tracer le graphe de g.

2.c. La fonction g est-elle continue ?

Exercice 10 Déterminer les nombres a et b pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} (x+1)^2 & \text{si } x < 2 \\ a & \text{si } x = 2 \\ x^2 + b & \text{si } x > 2 \end{array} \right.$$

soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 **1.** Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-4 \end{array} \right., \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(\pi x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & h(x) = \max(f(x), g(x)) \end{array} \right..$$

1.a Représenter f, g et h sur un même graphique.

1.b Les fonctions f et g sont elles-continues ? Qu'en est-il de h ?

2. Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \max(f(x), g(x))$.

2.a. Montrer que pour tout $x \in I$, $h(x) = \frac{|f(x)-g(x)|+f(x)+g(x)}{2}$.

2.b. Montrer que h est continue.

Exercice 12 Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = x^2\cos\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f_1(0) = 0$;
2. $f_2(x) = \sin x \sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$, et $f_2(0) = 0$;
3. $f_3(x) = xE(x)$;
4. $f_4(x) = E(x)\sin(\pi x)$.
5. $f_5(x) = \frac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\frac{\pi}{4}}$ si $x > \frac{\pi}{4}$, $f_5(x) = \sqrt{2}(4x - \pi + 1)$ si $x \leq \frac{\pi}{4}$.

Exercice 13 **1.** Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \frac{x^3+5x+6}{x^3+1} \end{array} \right.$. Montrer que f est prolongeable par continuité en -1.

2. Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \frac{(1+x)^n-1}{x} \end{array} \right.$. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0.

Exercice 14

1. Soit $f_1 : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x > 0$ par $f_1(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$. f_1 est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

2. Soit $f_2 :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in]-1,1[$ par $f_2(x) = (1-x^2)\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Etudier la parité de f_2 et montrer que f_2 est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[-1,1]$.
3. Soit $f_3 : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ définie pour $x > 0$ par $f_3(x) = x(1-(\ln x)^2)$. Montrer que l'on peut prolonger f_3 par continuité en 0.

Exercice 15 Soit f la fonction réelle à valeurs réelles définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Tracer le graphe de f.
2. f est elle continue ?
3. Montrer que f est strictement croissante. En déduire que f est bijective.
4. Donner la formule définissant f^{-1}.

Exercice 16 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.
1. Tracer le graphe de f.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.
3. Déterminer $f(\mathbb{R})$ et f^{-1}.

Exercice 17 On considère la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - 2 + \ln x \end{array} \right. .$$

1. Calculer $f(1)$ et $f(3)$. Que peut-on en déduire pour l'équation $f(x) = 0$?
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}^{*+}$ sur $\mathbb{R}$. On note g l'application inverse f.
4. Etudier l'application g : continuité, tableau de variation et limites en $\pm\infty$.
5. Représenter sur un même dessin f et g.

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.

Exercice 19 Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) = f(b)$. Montrer que la fonction $g(t) = f(t + \frac{b-a}{2}) - f(t)$ s'annule en au moins un point de $[a, \frac{a+b}{2}]$.
Application : une personne parcourt 4 km en 1 heure. Montrer qu'il existe un intervalle de 30 mn pendant lequel elle parcourt exactement 2 km.

Exercice 20 Un moine part à midi de son monastère pour aller à un village. Il y arrive le soir, y séjourne quelques jours puis en repart à midi vers le monastère. Il reprend le même chemin qu'à l'aller et arrive le soir à la même heure. Montrer qu'il existe un endroit du chemin où il passe exactement à la même heure à l'aller et au retour.

Exercice 21 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x-1| - |x-4| + |x-5| - 1 \end{array} \right.$.
1. Représenter la fonction f.
2. Quels sont les extrema (minimum ou maximum) relatif de f ?
3. Soit $x \geq 0$. Montrer que f possède un maximum sur l'intervalle $[0,x]$. On note $g(x)$ ce maximum. Représenter g sur le même dessin que f.

Exercice 22 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue telle que

$$\forall x_1, x_2 \in [0,1], |x_1 - x_2| \leq |f(x_1) - f(x_2)|.$$

1. Montrer que f est injective.
2. Montrer que soit $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ soit $f(0) = 1$ et $f(1) = 0$.
3. Montrer que $f([0,1]) = [0,1]$. En déduire que f est bijective.

Exercice 23 Soit $I = [a, b]$ un intervalle et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > 0$.
1. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) > \alpha$.
2. Ce résultat est-il toujours vrai si I est ouvert en a ou en b ?

Exercice 24 Soient f et g continues sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1]$ $f(x) < g(x)$. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $\forall x \in [0, 1]$ $f(x) + m < g(x)$.

Exercice 25 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$.
1. Soit $a > 0$. Démontrer que f est uniformément continue sur $[0, a]$.
2.a. Soit $\eta > 0$ et $a = \frac{1}{\eta}$. Calculer $f(a + \eta) - f(a)$ et montrer que $f(a + \eta) - f(a) > 2$.
2.b. En déduire que f n'est pas uniformément continue sur $[0, +\infty[$.

Exercice 26 On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{1}{9}$$

et on définit la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ en posant $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ possède une solution unique $\alpha \in]0, 1/2[$.
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ et en déduire que α est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$ dans l'intervalle $[0, 1/2]$.
3. Etudier les variations de f. En déduire que la suite (x_n) est croissante.
4. Montrer que $f(1/2) < 1/2$ et en déduire que $0 \leq x_n < 1/2$ pour tout $n \geq 0$.
5. Montrer que la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers α.