Université Lille 1 **2011/2012**
L1 MASS

Analyse
–
FICHE 2 : SUITES

Exercice 1 1. Représenter sur un graphique les 10 premiers termes des suites suivantes (On mettra n en abscisse et u_n en ordonnée).

(a) $u_n = \dfrac{n^2-25}{2n^2+1}$ (prendre 2 cm comme unité sur Oy)

(b) $u_n = (-1)^n$

(c) $u_n = \dfrac{1}{n}\cos n$ $\quad v_n = \dfrac{1}{n}|\cos n|$ (n en radians)

(d) $u_n = \cos n$

(e) $u_1 = 1$; $u_2 = 2$; $u_3 = 3$; $u_4 = -1$; $u_n = 2$ pour $n \geq 5$.

(f) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$ (prendre 10 cm comme unité sur Oy)

(g) $u_n = \cos \dfrac{n\pi}{6}$

(h) $u_n = \sin \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (prendre 1 cm comme unité sur Oy)

(i) $u_n = n^2+1$

(j) $u_n = \dfrac{1}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$ (pour $n \geq 2$)

2. Classer les dessins par paquets en précisant vos critères.
3. Pour chaque suite, pouvez-vous trouver l et n tels que $|u_n - l| < \frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{100}$? Mettre en relation avec le classement précédent.
4. Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ? (justifier)

(a) Une suite à termes positifs qui tend vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.

(b) Si une suite a une limite strictement positive, tous ses termes sont strictement positifs à partir d'un certain rang. Réciproque ?

Exercice 2 Montrer que les suites définies pour $n \geq 1$ par :

$u_n = \dfrac{n+1}{n} \qquad u_n = \dfrac{n}{n+1} \qquad u_n = \dfrac{1}{n^2+1} \qquad u_n = \frac{n}{n^2+1}$

admettent toutes des limites que l'on calculera.

Exercice 3 Étudier la convergence des suites :

$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}, \quad \sqrt{n^2+n+1} - n, \quad \dfrac{n\sin(n)}{n^2+1}, \quad \dfrac{1}{n} + (-1)^n, \quad n\sum_{k=1}^{2n+1} \dfrac{1}{n^2+k}.$

Exercice 4 Soit $u_k = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les constantes a, b et c telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait

$$u_k = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

2. En déduire une expression simplifiée de $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et calculer $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Exercice 5 **1.a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$.
1.b. En déduire $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$.
2. En trouvant un encadrement, calculer les limites éventuelles des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont le terme général u_n est défini par

$$\left(\frac{1}{3}\sin n\right)^n, \quad \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+k}, \quad \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}.$$

Exercice 6 Soit $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.
1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \leq \frac{1}{\sqrt{k}}$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}dx \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_1^{n} \frac{1}{\sqrt{x}}dx.$$

3. Calculer $\lim_{n\to\infty} u_n$.

Exercice 7 Déterminer les limites lorsque n tend vers l'infini des suites ci-dessous.

1. $1\,;\ -\dfrac{1}{2}\,;\ \dfrac{1}{3}\,;\ \ldots\,;\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\,;\ \ldots$
2. $2/1\,; 4/3\,; 6/5\,; \ldots; 2n/(2n-1)\,; \ldots$
3. $0{,}23\ ;\ 0{,}233\ ;\ \ldots\ ;\ 0{,}233\cdots3\ ;\ \ldots$
4. $\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}$
5. $\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$
6. $\left[\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n+1} - \dfrac{2n+1}{2}\right]$
7. $\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
8. $\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
9. $\left(1/2+1/4+1/8+\cdots+1/2^n\right)$
10. $\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{27}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{3^n}\right)$
11. $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$
12. $\dfrac{n\sin(n!)}{n^2+1}$
13. Démontrer la formule $1+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$; en déduire $\lim_{n\to\infty} \frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

Exercice 8 Soit q un entier au moins égal à 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \cos\dfrac{2n\pi}{q}$.

1. Montrer que $u_{n+q} = u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer u_{nq} et u_{nq+1}. En déduire que la suite (u_n) n'a pas de limite.

Exercice 9 **1.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(1+u_n+E(u_n))$.
1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n < 1$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On note l sa limite.
4. En remarquant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite, calculer l.

Exercice 10 Etablir la convergence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^k}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn}, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Exercice 11 1. Soient $b \geqslant a > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.

2. Montrer les inégalités suivantes ($b \geqslant a > 0$) :

$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b \qquad \text{et} \qquad a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$

3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

   (a) Montrer que $u_n \leqslant v_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que (v_n) est une suite décroissante.

   (c) Montrer que (u_n) est croissante En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

Exercice 12 Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites (a_n) et (b_n) par $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 2b_n}{3}$.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. En calculant $a_n + b_n$, montrer que (a_n) et (b_n) convergent vers $\dfrac{a_0 + b_0}{2}$.

Exercice 13 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les deux suites définies par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et que leur limite commune est comprise entre $\frac{49}{36}$ et $\frac{61}{36}$.

Exercice 14 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $u_n = 2\sqrt{n} - S_n$, $v_n = 2\sqrt{n+1} - S_n$.
1.a. Montrer $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
1.b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $S_{2n} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$. En déduire que $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et que leur limite commune est positive.
3. Calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.
4. Calculer $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}}$.

Exercice 15 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que :

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + \frac{u_{2n}}{2}) = 1.$$

1.a. Soit $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une suite extraite qui vers l. La suite $(u_{2n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?
1.b. Déterminer l. Cette limite l dépend-elle de la suite extraite ?
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. (Indication : on pourra raisonner par l'absurde et construire une suite extraite qui ne converge pas vers l...)

Exercice 16 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n}$.
1. Montrer que pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $n \leq m$ on a $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n, m > N$ implique $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^m} < \varepsilon$.
3. En écrivant pour $m > n$ $u_m - u_n = u_m - u_{m-1} + u_{m-1} - u_{m-2} + \ldots + u_{n+1} - u_n$, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
3. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathbb{R}$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était une suite de rationnelle, pourrait-on conclure qu'elle converge dans $\mathbb{Q}$?

Exercice 17 **1.** Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ est croissante.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas de Cauchy dans $\mathbb{R}$. (Indication : On pourra considérer la différence $u_{2n} - u_n$...)
3. Déduire des premières questions que $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $\lim_{n\to\infty} n(v_{n+1} - v_n) = 1$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 18 On considère la suite réelle définie par :

$$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 1}.$$

1. Montrer que x_n est supérieur ou égal à 1 pour tout n.
2. Montrer que si (x_n) converge, sa limite l vérifie

$$l = \sqrt{2l + 1}.$$

3. l étant définie par l'égalité de 2), trouver $k \in]0,1[$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|x_{n+1} - l| \leq k|x_n - l|.$$

   En déduire que $|x_n - l| \leq k^n |x_0 - l|$.
4. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Exercice 19 En utilisant les méthodes de l'exercice précédent, étudier les suites définies par :

$$y_0 = 3\ ; \quad y_{n+1} = \frac{4 + 3y_n}{3 + 2y_n}\ ; \text{(On montrera que pour tout } n \in \mathbb{N}, 0 \leq y_n)$$
$$z_0 = 1\ ; \quad z_{n+1} = 1 + \frac{1}{z_n}\ ; \text{(On montrera que pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{2} \leq z_n \leq 2).$$

Exercice 20 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in [0,1]$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$.
1. En appliquant le théorème du point fixe, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l dont on précisera la valeur.
2. On choisit $u_0 = 0$. Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tels que $|u_n - l| \leq 10^{-5}$.

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_0 \in [0,1]$, $v_{n+1} = f(f(v_n))$.
3. En appliquant le théorème du point fixe, montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
4. On choisit $v_0 = 0$. Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tels que $|v_n - l| \leq 10^{-5}$.
5. Comparer les convergences de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 21 En appliquant le théorème du point fixe, montrer la convergence des suites définies par les relations de récurrence suivantes :
1. $u_0 \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{8}]$, $u_{n+1} = \frac{5}{2} u_n (1 - u_n)$.
2. $u_0 \in \mathbb{R}^*$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4} \sin\left(\frac{1}{u_n}\right)$.
3. $u_0 \in [1,2]$, $u_{n+1} = \frac{u_n+2}{u_n+1}$. Application : Estimer $\sqrt{2}$ à 10^{-4} près.