Université Lille 1 **2012/2013**
L1 MASS

Dossier d'étude

–

FICHE 6 : ARITHMÉTIQUE ET DÉRIVÉES

Exercice 1 Soit $a, b \in \mathbb{R}$.
(1) Montrer que $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
(2) En utilisant (1) montrer que $5^{45} + 4^{30}$ n'est pas premier.

Exercice 2 (1) Soit $x \in \mathbb{Z}$, montrer que $x^2 \equiv 0[4]$ ou $x^2 \equiv 1[4]$
(2) (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 2 \quad 2^n$ divise 4.
(b) Trouver le reste de la division de $2^n - 1$ par 4
(c) En déduire que si $n \geq 2$, alors $2^n - 1$ n'est pas le carré d'un entier naturel.

Exercice 3 Démontrer que si a, b, et c sont des entiers relatifs tels que $a|b$ et $b|c$ alors $a|c$.

Exercice 4 (1) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ n^3 - n$ est un multiple de 3.
(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = 3^{2n+2} - 2^{n+1}$.
(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 7.3^{2n+2}$.
(b) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_n$ est un multiple de 7.

Exercice 5 (1) Trouver tous les couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $6x + 10y = 15$.
(2) Même question pour l'équation $6x + 10y = 30$.

Exercice 6 (1) Déterminer l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{Z}$ de l'équation $3x \equiv 6[9]$.
(2) Pour chacun des trois systèmes suivant, déterminer l'ensemble des solutions $x \in \mathbb{Z}$

$$(a) \left\{ \begin{array}{ll} x \equiv 3 & [13] \\ x \equiv 8 & [17] \end{array} \right. \quad (b) \left\{ \begin{array}{ll} 3x \equiv 5 & [9] \\ x \equiv 10 & [11] \end{array} \right. \quad (c) \left\{ \begin{array}{ll} x \equiv 5 & [49] \\ x \equiv 19 & [21] \end{array} \right.$$

Exercice 7 Calculer la dérivée des fonctions suivantes

$$(a) f(x) = (1 + x^2) \ln(1 + x^2); \quad (b) f(x) = \cos(x) \exp(\sin(x)); \quad (c) f(x) = \frac{\exp(x)}{2 + \sin(x)}; \quad (d) f(x) = 2^x$$

Exercice 8 Calculer la dérivée des fonctions suivantes

$$(a) f(x) = \frac{\sin(x)}{x^2 + 1}; \quad (b) f(x) = \exp(x^2 \sin(x)).$$

Exercice 9 Soit f une fonction bijective dérivable. On suppose que f^{-1} est dérivable.
(1) Montrer que

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}, \quad (\text{avec } y_0 = f(x_0)).$$

(2) Appliquation à $f(x) = \tan(x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 10 Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq 0$ et $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
Soit $a < b$, déterminer explicitement $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c).$$

Exercice 11 Soit la fonction $f(x) = -\frac{1}{x}$ définie sur $D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.
(a) Montrer que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in D_f$
(b) Cette fonction est-elle strictement croissante ? Conclure.

Exercice 12 Démontrer que
$$\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 13 Soit $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Simplifier f.

Exercice 14 Soit $f(x) = \arctan \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Simplifier f.

Exercice 15 Soit $f(x) = \arctan \frac{1}{2x^2} - \arctan \frac{x}{x-1} + \arctan \frac{x+1}{x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Simplifier f.

Exercice 16 Soit $f(x) = \arctan \frac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Calculer $f'(x)$.
3. Simplifier f.

On rappelle les dérivées suivantes :

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$