Université Lille 1 **2012/2013**
L1 MASS

Dossier d'étude

–

FICHE 5 : FONCTIONS RÉELLES

Exercice 1 Écrire sous la forme $\frac{m}{n}\pi$ avec $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}*$, $|m|$ et n premiers entre eux, $\arcsin(\sin\alpha)$, $\arccos(\cos\alpha)$ et $\arctan(\tan\alpha)$ dans les cas : $\alpha = \frac{59}{5}\pi$; $\alpha = \frac{84}{5}\pi$; $\alpha = \frac{76}{5}\pi$.

Exercice 2 **1.**Pour tout $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$ tel que $a+b$ appartienne à $\mathbb{R} \setminus \{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$, montrer que $\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ (On pourra utiliser les formules de trigonométrie de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$).
2. Montrer que l'équation $\arctan(2x) + \arctan(x) = \frac{\pi}{4}$ a pour unique solution $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{4}$.

Exercice 3 **1.** Montrer que pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$ tel que $\alpha-\beta$ n'appartient pas à $\{k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$ (On pourra utiliser les formules de trigonométrie de $\cos(\alpha-\beta)$ et $\sin(\alpha-\beta)$).
2.a. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $ab \neq -1$, on a $\arctan a - \arctan b = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right) \mod \pi$.
2.b. En déduire que pour tout $a > b > 0$ on a $\arctan a - \arctan b = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_n$ définie par $u_k = \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{k^2-k+1}\right)$ converge. On précisera $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4 Une statue de hauteur s est placée sur un piédestal de hauteur p. On note d la distance entre le piédestal de la statut un un observateur (dont la taille est supposée négligeable) et α l'angle sous lequel l'observateur voit la statue (piédestal exclus).
1. Faire un dessin.
2. Calculer $\tan\alpha$ en fonction de s, p et d.
3. A quelle distance d doit se placer l'observateur pour que l'angle α soit maximal.

Exercice 5 **1.a.** Exprimer $\sin(a+b)$ en fonction de $\sin a$, $\sin b$, $\cos a$ et $\cos b$.
1.b. Résoudre l'équation suivante : $\arcsin x = \arcsin\frac{2}{5} + \arcsin\frac{3}{5}$.
2.a. Calculer $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
2.b. Résoudre l'équation $\arccos x = 2\arccos\frac{3}{4}$.

Exercice 6 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}$?

$$a)\ f(x) = \sin x \cdot \sin\frac{1}{x}\ ; \quad b)\ g(x) = \frac{1}{x}\ln\frac{e^x+e^{-x}}{2}\ ; \quad c)\ h(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2}\ .$$

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$.
1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la suite $(u_n)_n$ définie par $u_n = f(\frac{x}{2^n})$ converge vers $f(0)$.
2. Montrer que f est constante.

Exercice 8 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$, $f(x) = 1/2 - x$ si $x \in]0, 1/2[$, $f(1/2) = 1/2$, $f(x) = 3/2 - x$ si $x \in]1/2, 1[$ et $f(1) = 1$.

1. Tracer le graphe de f. Étudier sa continuité.
2. Démontrer que f est une bijection de $[0,1]$ sur $[0,1]$.
3. Démontrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a $f(x) = \frac{1}{2} - x + \frac{1}{2}E(2x) - \frac{1}{2}E(1-2x)$.

Exercice 9 Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue telle que
(i) $f(0) = 0$,
(ii) $\forall x, y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \geq |x - y|$.
1. Montrer que f est injective.
2. En déduire que f est strictement croissante.

3. Soit $x \in [0,1]$ fixé et $(x_n)_n$ la suite définie par $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3.a. Démontrer que si $x_0 < x_1$ alors $(x_n)_n$ est croissante.
3.b. Démontrer que si $x_0 > x_1$ alors $(x_n)_n$ est décroissante.
3.c. En déduire que $(x_n)_n$ est convergente.
3.d. En remarquant que pour tous entiers $n \geq m$ on a $|x_{n+1} - x_n| \geq |x_{m+1} - x_m|$, montrer que $(x_n)_n$ est constante.
4. En déduire que pour tout $x \in [0,1]$ on a $f(x) = x$

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\cos x}{1+x^2}$. Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$, minorée sur $\mathbb{R}$. Déterminer $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$.

Exercice 11 Montrer que l'équation $x^7 - 3\,x^2 + 4\,x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-1,1[$. Même question pour l'équation $x^{29} + 14\,x^{17} - 7\,x^5 + 2 = 0$.

Exercice 12 Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue telle que pour tout $x \in [a,b]$, $f(x)^2 = 1$. En raisonnant par l'abursde, montrer que f est constante. (On pourra penser au théorème de Bolzano...)

Exercice 13 Calculer les limites des fonctions ci-dessous aux points demandés :
1. $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{3x^2+x-4}$ en 0, en 1, en $-\frac{4}{3}$ et en $\pm\infty$.
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}-1}$ en 1, en $+\infty$.
3. $f(x) = \frac{|x-1|}{|x|-1}$ en 1, en -1, en ∞ et en $-\infty$.

Exercice 14 Calculer les limites suivantes

$$\mathbf{1}.\quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}, \qquad \mathbf{2}.\quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\tan(2x)}, \qquad \mathbf{3}.\quad \lim x \to 0 \frac{x}{2+\sin\frac{1}{x}}.$$

Exercice 15 Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-1)(E(x)-2)$.
1. Déterminer les points de $\mathbb{R}$ où f est continue.
2. tracer la courbe représentative de f sur $[-1,4[$. Sur cet intervalle, la fonction admet-elle un maximum ? Un minimum ?

Exercice 16 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left|x - 2E\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|$.
1. Etudier la continuité de f.
2. Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[-2,2]$.
3. Montrer que f est paire et de périodique de période 2.

Exercice 17 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{|x|+1}$.
1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $f(\mathbb{R})$ et f^{-1}.

Exercice 18 On considère la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - 2 + \ln(x) \end{array} \right.$.
1. Calculer $f(1)$ et $f(3)$. Que peut-on en déduire pour l'équation $f(x) = 0$?
2. Donner le tableau de variation de f. En déduire que $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ est une bijection. On note g l'application réciproque de f.
3. Donner le tableau de variation de g.

Exercice 19 Soit a un réel et f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} ax+3 & \text{si } x \in [0,\frac{1}{2}[\\ \sqrt{\frac{2x-1}{x+15}} & \text{si } x \in [\frac{1}{2},1] \\ \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} & \text{si } x \in]1,+\infty[\end{array} \right.$$

1. Montrer que f est continue en 1.
2. Pour quelle valeur de a la fonction f est-elle continue en $\frac{1}{2}$.