Université Lille 1 **2012/2013**
L1 MASS

Dossier d'étude

–

FICHE 4 : LOGIQUE, ENSEMBLES, RAISONNEMENT ET APPLICATIONS

Exercice 1 Soit $X = \{a, b, c\}$.
1. Donner $\mathcal{P}(X)$, l'ensemble des parties de X.
2. Soit f l'application de X dans $\mathcal{P}(X)$ définie par $f(a) = \emptyset$, $f(b) = X$ et $f(c) = \{a, b\}$. On note A l'ensemble des $x \in X$ vérifiant $x \notin f(x)$.
2.a. Déterminer A.
2.b. Démontrer qu'il n'existe aucun $x \in X$ tel que $A = f(x)$.
3. Dans cette question, X est un ensemble quelconque et f une application de X dans $\mathcal{P}(X)$. On note encore $A = \{x \in X,\ x \notin f(x)\}$. En raisonnant par l'absurde, démontrer que pour tout $x \in X$, $A \neq f(x)$.

Exercice 2 **1.** Soit p un entier. On considère la proposition suivante

$$\mathcal{P} : \text{“}p^2 \text{ est multiple de } 3 \ \Rightarrow p \text{ est multiple de } 3\text{”}.$$

1.a. Donner la contraposée de $\mathcal{P}$
1.b. En raisonnant par contraposée, montrer que la proposition $\mathcal{P}$ est vraie.
2. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note f_n une application de $\mathbb{N}$ dans lui même. On définit alors l'application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & f(n) = f_n(n) + 1 \end{array} \right.$. En raisonnant par l'abusrde, démontrer qu'il n'existe aucun $p \in \mathbb{N}$ tel que $f = f_p$.

Exercice 4

1. Soit $p_1, p_2, \ldots, p_r$, r nombres premiers. On rappelle qu'un entier naturel est dit premier s'il est divisible par exactement 2 entiers naturels : 1 et lui-même, comme par exemple 2,3, 5 mais pas 6 qui divisible par 1 et 6 mais aussi par 2 et 3.
   Montrer que l'entier $N = p_1 p_2 \ldots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i.
2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 5 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in]0, 1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que $0 < u_1 < \frac{1}{2}$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 6 Démontrer, en raisonnant par récurrence, que $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111 quel que soit $n \in \mathbb{N}$. (Indication : $1000 = 9 \times 111 + 1$).

Exercice 7 Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2-3}{x+2}$ (On commencera par donner le domaine de définition de f).
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 - \frac{3}{2}(x_n - 3) > 0$.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
5. déterminer $\lim_{n\to+\infty} x_n$.

Exercice 8 Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n$$

Démontrer que l'on a

$$S_n = \frac{1}{3} n(n-1)(n+1)$$

Exercice 9 On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ u_{n+1} = u_n + 2u_{n-1}$$

Démontrer que :

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{N}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$.

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 - x$.
f est-elle injective ? surjective ? Déterminer $f^{-1}([-1, 1])$ et $f(\mathbb{R}^+)$.

Exercice 11 Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n$,
2. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$,
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$,
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$,
5. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2$,
6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto= 2x/(1+x^2)$.

Exercice 12 **1.** L'application $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z + 1/z$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Donner l'image par f du cercle de centre 0 et de rayon 1.
3. Donner l'image réciproque par f de la droite $i\mathbb{R}$.

Exercice 13 Soit $f : X \to Y$. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes :

i. f est injective.
ii. $\forall A, B \subset X,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
iii. $\forall A, B \subset X,\ A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$.

Exercice 14 Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Exercice 15 Démontrer les relations suivantes :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad \text{et} \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Exercice 16 Montrer que si F et G sont des sous-ensembles de E alors :

$$(F \subset G \iff F \cup G = G) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff \complement F \cup G = E).$$

En déduire que :

$$(F \subset G \iff F \cap G = F) \quad \text{et} \quad (F \subset G \iff F \cap \complement G = \emptyset).$$