Université Lille 1 **2012/2013**
L1 MASS

Dossier d'étude
–
FICHE 3 : SUITES DE NOMBRES RÉELS

Exercice 1
1. Une suite non croissante est-elle décroissante ? Donner des exemples de suite ni croissante ni décroissante. Comment exprime-t-on qu'une suite n'est pas croissante ?
2. Ecrire en symbolisme logique que la suite (u_n) est majorée ; minorée ; bornée ; que le nombre réel a est un majorant de cette suite.
3. Soient les suites (u_n) définies par :
(i) $u_n = n^2 + n$
(ii) $u_n = (-1)^n(n^2 + n)$
(iii) $u_n = 1 + \frac{1}{n}$
(iv) $u_n = 2 - \frac{1}{n}$
(v) $u_n = E(\frac{4n}{n+1}), \quad n \geq 3; \quad E(x)$ désigne la partie entière de x.
Sont-elles majorées ; minorées ; bornées ; croissantes ; décroissantes ? (Pour la question (v), on montrera que pour $n \geq 3$, $\frac{4n}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+2}$).

Exercice 2
Soit (u_n) une suite croissante non majorée et (v_n) une suite décroissante non minorée.
1. Montrer qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$, $u_n \geq 1$.
2. Montrer qu'il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$, $v_n \geq -1$.
3. Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Déduire des questions précédentes que $(u_n v_n)$ est décroissance à partir du rang N et non minorée.

Exercice 3
Soit la suite $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$. Est-elle bornée ? convergente ?

Exercice 4
Vrai ou Faux. Voici une liste de propositions ; il s'agit de dire si chacune d'elles est vraie ou fausse.
1. Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite est décroissante et minorée, elle converge vers 0.
3. $(|u_n|)$ est convergente si et seulement si (u_n) est convergente.

Exercice 5
Vrai ou Faux. Voici une liste de propositions ; il s'agit de dire si chacune d'elles est vraie ou fausse.
1. Si on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ pour tout n, et si (v_n) et (w_n) sont convergentes, alors (u_n) convergente.
2. Supposons que (u_n) tend vers ℓ et (v_n) tend vers ℓ' ; si $u_n < v_n$ pour tout n, alors $\ell < \ell'$.
3. Si la suite (u_n) vérifier :
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n > N, |u_{n+1} - u_n| < \epsilon,$$
alors (u_n) est de cauchy. (On pourra considérer la suite (u_n) définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ dont on admettra qu'elle vérifie $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$).

Exercice 6
1. Montrer que $\forall x \geq 0;\ \sin(x) \leq x$
2. Montrer que la suite $u_n = \cos^{\frac{2}{3}}(n)\sin(\frac{1}{n})$ converge vers 0.

Exercice 7
1. Montrer que $\forall x \geq 0;\ \ln(x+1) \leq x$.
2. Montrer que la suite $u_n = \frac{2}{n^2}\ln(n+1)\sqrt{n|\sin(n)|} + \frac{1}{n!}$ converge vers 0.

Exercice 8
Etudier la convergence de la suite :
$$u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n} \quad a \geq b > 0.$$
Exercice 9 Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq k u_n$ où $k \in]0,1[$. Montrer que la suite (u_n) tend vers 0.

Exercice 10 Soit $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} E(kx), \quad x \in \mathbb{R}$ et $E(x)$ la partie entière de x.
1. Montrer que pour tout $n \geq 1$
$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (kx - 1) < u_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} kx.$$
2. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 11
1. Donner la définition de deux suites adjacentes.
2. Montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ sont adjacentes.

Exercice 12
Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels.
Supposons que $u_n + v_n$ converge vers S et $u_n v_n$ converge vers P.
1. Expimer $(u_n - v_n)^2$ en fonction de $(u_n + v_n)$ et $u_n v_n$.
En déduire que $S^2 - 4P \geq 0$.
2. On suppose que $S^2 - 4P = 0$.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent et calculer leurs limites.

Exercice 13
Soit la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 \leq 1$ et de
$$u_n = \frac{u_{n-1} + n}{n+1}, \quad n \geq 1.$$
1. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)(1-u_n)}{n+2}$.
2. Montrer que $1 - u_n = \frac{1-u_{n-1}}{n+1}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$.
3. Montrer que la suite (u_n) est monotone.
4. Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.
(On pourra remarquer que $u_n = \frac{u_{n-1}}{n+1} + \frac{n}{n+1}$).

Exercice 14 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x+2}{x+1} \end{array} \right.$ et la suite (u_n) définie par la donnée de $u_0 > 0$ et de
$$u_{n+1} = f\left(\frac{u_n}{n+1}\right), \quad n \geq 1.$$
1. Etudier les variations de f.
2. Supposons que la suite (u_n) converge vers ℓ. Quelle est la valeur de ℓ ?
3. Montrer que $1 \leq u_1 \leq 2$.
4. Montrer que pour $n \geq 2$,
$$\frac{2n+2}{n+2} \leq u_n \leq 2.$$
5. En déduire que la suite (u_n) converge vers 2.

Exercice 15
Soit (u_n) la suite vérifiant $u_0 = 1,\ u_1 = 0 \quad$ et $\quad u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2}, \quad$ si $n \geq 2$.
Montrer qu'il existe a et b réels tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n = a2^n + b(-1)^n$.

Exercice 16 Soit la suite (u_n) vérifiant $u_0 = 1, u_1 = 2 \quad$ et $\quad u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2}, \quad$ si $n \geq 2$. Montrer que (u_n) est une suite arithmétique. En déduire l'expression de (u_n) en fonction de n.