Université Lille 1 **2012/2013**
L1 MASS

Dossier d'étude

–

FICHE 2 : NOMBRES COMPLEXES - ALGÈBRE

Exercice 1 Trouver le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$\frac{\sqrt{48}}{5} + \frac{4}{5}i \quad ; \quad -\sqrt{6} + i\sqrt{2} \quad ; \quad \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{39} \quad ; \quad 1 + e^{i\theta} \quad , \quad \theta \in \mathbb{R}\,.$$

Exercice 2 Déterminer partie réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $2 + i\sqrt{12}$
2. i^n (on distingera les cas $n = 4k$, $n = 4k + 1$, $n = 4k + 2$ et $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{Z}$).
3. $(1 + \sqrt{3}i)^n + (1 - \sqrt{3}i)^n$ (on distinguera là encore plusieurs cas selon les valeurs de n).
4. $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{102}$.

Exercice 3 Déterminer les racines carrées du nombre $a = 4 + 4i$.

Exercice 4 Déterminer les racines cubiques de l'unité. On note j la racine cubique de l'unité qui est différente de 1 et avec $\Im(j) > 0$. Montrer que l'on a $j^2 = -1 - j$, que $j^2 = \overline{j}$ et que $\overline{j}$ est également une racine cubique de l'unité.

Exercice 5
1. Quelles sont les racines cubiques de -8 ?
2. Déterminer les racines 4–ièmes de i et de $-i$ et en déduire les racines 8–ièmes de -1.

Exercice 6 Décomposer les polynômes suivants en produit de facteurs du premier degré :

$$z^2 + z + 2; \quad z^3 - 1; \quad z^4 + 1$$

Exercice 7 On veut calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$. Pour cela, on pose $a = 2\cos\frac{2\pi}{5}$, $b = 2\cos\frac{4\pi}{5}$ et $z = e^{2i\pi/5}$.

1. Vérifier que $a = z + z^4$ et $b = z^2 + z^3$.
2. Montrer que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
3. Calculer $a + b$ et $a \cdot b$.
4. En déduire a et b puis les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$.
5. En déduire au moyen d'une formule de trigonométrie la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{5}$ et de $\sin\frac{\pi}{5}$.

Exercice 8 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $|z - 3| = |z - 5|$.
2. Montrer que l'ensemble des points M du plan d'affixe z tel que $\left|\frac{z-3}{z-5}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice 9
1. A l'aide de la formule (encore vraie) $e^{ia}e^{ib} = e^{i(a+b)}$, retrouver les formules pour $\sin(a+b)$ et $\cos(a + b)$.
2. Retrouver ainsi les égalités $\cos(3a) = 4cos^3(a) - 3\cos(a)$ et $\sin(3a) = 3\sin(a) - 4\sin^3(a)$.
3. En remarquant que $\cos(3a)$ est la partie réelle de $e^{i3a} = (e^{ia})^3$, donner une autre preuve de ces identités.

Exercice 10 Soit a, b, c des nombres complexes de module 1 tels que $a+b+c=0$.

1. Montrer que $1+2\Re(a\bar{b})=0$. (On pourra considérer le carré de l'identité $|a+b|=|c|$).
2. En déduire que l'argument de a/b est $\frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$.

Exercice 11 Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, on pose $Z = \frac{1+z}{1-z}$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixes z tels que

1. $|Z| = 1$.
2. $|Z| = 2$.
3. $Z \in \mathbb{R}$.
4. $Z \in i\mathbb{R}$ (Indication : On montrera que $\zeta \in \mathbb{C}$ appartient à $i\mathbb{R}$ si et seulement si $\zeta = i\bar{\zeta}$).

Exercice 12 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et on identifie P à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par

$$M(x,y) \mapsto x+iy = z,$$

où z est appelé l'affixe de M. Soit $g : P \to P$ qui à tout point M d'affixe $z \neq -1$ associe $g(M)$ d'affixe $z' = \frac{1-z}{1+z}$.

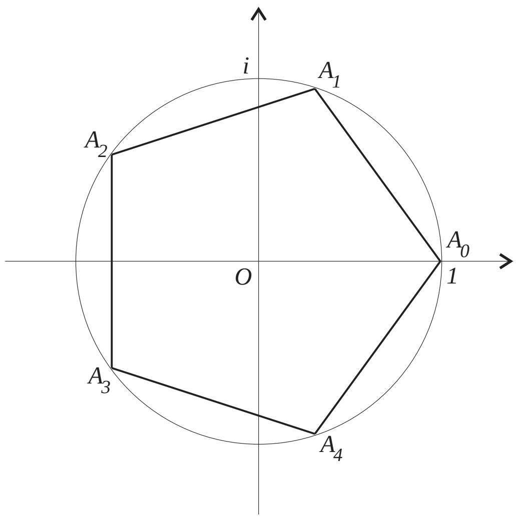
1. Calculer $z' + \bar{z}'$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ tel que $|z| = 1$.
2. En déduire l'image du cercle de rayon 1 de centre 0 privé du point de coordonnées $(-1, 0)$ par l'application g.

Exercice 13

1. Soit C et M deux points du plan complexe d'affixes c et z respectivement. Déterminer l'affixe du point M', image de M par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. Soit A, B et C trois points du plan complexe dont les affixes sont respectivement a, b, c. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Montrer que si ABC est équilatéral alors $a + bj + cj^2 = 0$ ou $a + bj^2 + cj = 0$.
3. Réciproquement, on suppose que $a + jb + j^2c = 0$; montrer que ABC est un triangle équilatéral direct.
4. ABC étant un triangle équilatéral direct du plan complexe, on construit les triangles équilatéraux directs BOD et OCE, ce qui détermine les points D et E (O est l'origine du plan complexe). Faire un dessin. Quelle est la nature du quadrilatère $ADOE$?

Exercice 14 (Théorème de Napoléon) Soit A, B et C trois points du plan complexe d'affixe a, b et c respectivement. Soit P, Q et R les trois points du plan tels que APB, BQC et CRA soient des triangles équilatéraux directs.
1.a. Faire un dessin.
1.b. Déterminer les affixes p, q et r des points P, Q et R respectivement. (On pourra utiliser l'exercice 13)
2. Soit C' le centre de gravité du triangle APB, A' celui du triangle BQC et B' celui du triangle CRA.
2.a. Compléter le dessin.
2.b. Déterminer les affixes des points A', B' et C'.
3. Montrer que $A'B'C'$ est un triangle équilatéral.
4. Montrer que ABC et $A'B'C'$ ont le même centre de gravité.
5. Montrer que $AA' = BB' = CC'$.

Exercice 15 Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.



1. Donner les affixes $\omega_0, \dots, \omega_4$ des points $A_0, \dots, A_4$. Montrer que $\omega_k = {\omega_1}^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Montrer que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$, $\omega_1^4 = \overline{\omega_1}$ et $\omega_1^3 = \overline{\omega_1}^2$.
2. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
3. On considère le point B d'affixe -1. Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\sin \frac{\pi}{10}$ puis de $\sqrt{5}$ (on remarquera que $\sin \frac{\pi}{10} = \cos \frac{2\pi}{5}$).
4. On considère le point I d'affixe $\frac{i}{2}$, le cercle $\mathcal{C}$ de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de $\mathcal{C}$ avec la demi-droite $[BI)$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ.
5. **Application :** Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.