Université Lille 1 **2012/2013**
L1 MASS

Dossier d'étude
–
FICHE 1 : NOMBRES RÉELS - ANALYSE

Exercice 1 Déterminer, s'ils existent, les majorants, les minorants, la borne inférieure et la borne supérieure des ensembles suivants

$$\mathbb{Q}\cap]1,2], \qquad]1,10]\cup\{0\}, \qquad \{\frac{1}{n^2},\ n\in\mathbb{Z}^*\}.$$

Exercice 2 Déterminer, s'ils existent, les majorants, les minorants, la borne inférieure et la borne supérieure des ensembles suivants

$$I=\{x\in\mathbb{R}, x^2\leq x\}, \qquad]\frac{1}{3},\frac{1}{2}]\cap\mathbb{Q}, \qquad \{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{Z}^*\}.$$

Exercice 3 Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|-x|=x$.
2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|x|^2=x^2$.
3. Pour tout $a,b\in\mathbb{R}$, $|a-b|=a+b$.
4. Pour tout $a,b\in\mathbb{R}$, $|a+b|=|a|+|b|$.
5. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos|x|=\cos x$.

Exercice 4
1. Soit $f:\left\{\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & |x-1|+|x-4|+|x-5|-1\end{array}\right.$. Tracer le graphe de f.
2. Soit $g:\left\{\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \cos x\end{array}\right.$ et soit $h:\left\{\begin{array}{lll}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & |\cos x|\end{array}\right.$. Tracer les graphes de g et de h sur un même graphique.

Exercice 5 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x+2|=7$
2. $|x+3|\leq 4$
3. $|x+12|\leq|x^2-8|$.

Exercice 6 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x+3|=5$
2. $|2x-4|\leq|x+2|$
3. $|x+12|=|x^2-8|$

Exercice 7 Soit $A=\{\frac{1}{n},\ n\in\mathbb{N}^*\}$ et $B=\{p^2,\ p\in\mathbb{Z}\}$.
1. Déterminer tous les majorants et tous les minorants de A et de B. (justifier)
2. Déterminer $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$ s'ils existent.
3. Déterminer, s'ils existent, les plus grands éléments et les plus petits éléments de A et de B.

Exercice 8 Soit $a=1,566666666666\ldots$. Le nombre réel a est-il rationnel ou irrationnel ? (On pourra essayer d'écrire le nombre réel a sous la forme $\frac{p}{q}$ avec $q\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{Z}$...).

Exercice 9 Pour x un nombre réel, on considère la proposition

$$P(x):\ \text{“}\forall\varepsilon>0, x-2<\varepsilon\text{”}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Que signifie "$P(x)$ est fausse" ?
2. Est-ce que $P(1)$ est vrai ? $P(3)$? $P(2)$? $P(2,1)$? $P(2,01)$?
3. Montrer que pour tout $x \in]2,+\infty[$, $P(x)$ est fausse.

Exercice 10 Sachant que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ sont irrationnels, montrer que $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ est irrationnel.

Exercice 11 Soit x un nombre irrationnel et a, b, c, d des rationnels tels que $ad - bc \neq 0$. Montrer que $\frac{ax+b}{cx+d}$ est un irrationnel.

Exercice 12 On note $E(x)$ la partie entière d'un réel x.

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $E(x) > E(y)$. Montrer qu'alors $E(x) > y$.
2. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$ on a $E(x) \leq E(y)$. (Indication : on pourra supposer $E(x) > E(y)$ et chercher une contradiction...)

Exercice 13 Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
1. On suppose que $\forall x \in A$, $x > 0$. A-t-on $\inf A > 0$? Justifier.
2. On considère les deux propositions suivantes.
(i) Il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in A$ on ait $x \geq \alpha$.
(ii) Pour tout $x \in A$, on a $x > 0$.
2.a. Montrer que (i) implique (ii).
2.b. L'implication réciproque est-elle vraie ? Justifier.

Exercice 14 **1.** Soit $r \in \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
1.a. Montrer que $r + x$ est irrationnel.
1.b. Montrer que si $r \neq 0$ alors $r \cdot x$ est irrationnel.
2. Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux (justifier).

1. Si x et y sont des irrationnels alors $x \cdot y$ est un irrationnel.
2. Si x et y sont des irrationnels alors $x + y$ est un irrationnel.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, si n est impair alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.

Exercice 15 Soit
$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots$$
On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots 2 \cdot 1$ et $0! = 1$.
On veut montrer que e n'est pas rationnel. Pour cela on suppose que $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $q \neq 0$ et on cherche une contradiction.
1. Soit $s = q!\left(e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{q!}\right)$. Vérifier que s est un entier naturel non nul.
2. En remarquant que $s = q!\left(\frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \dots\right)$, montrer que $s \leq \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \dots$.
3. En déduire que $s < \frac{1}{q}$.
4. En déduire que e n'est pas un rationnel.