Chapitre 5

Fonctions Réelles et dérivabilités

5.1 Dérivabilité

Définition 5.1.1 Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I, x_0 un point intérieur de I. On dira que f est dérivable en x_0 si le rapport $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite réelle lorsque h tend vers 0, $h \neq 0$. Dans ce cas on appelle dérivée de f en x_0 et on note $f'(x_0)$ le nombre

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

On dira que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. On note alors f' la fonction dérivée de f.

Remarque : En écrivant $x = x_0 + h$, il vient que f est dérivable en x_0 si et seulement si $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite lorsque x tend vers x_0, $x \neq x_0$. On a alors $f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Interprétation géométrique : On rapporte le plan à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note C_f la courbe représentative de f dans ce repère.
Soit M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et soit M_1 le point de coordonnées $(x_1, f(x_1))$. On pose $a(x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$. $a(x_1)$ est le coefficient directeur de la droite (M_0M_1) qui a alors pour équation $y = a(x_1)(x - x_0) + f(x_0)$.
Lorsque x_1 tend vers x_0, $a(x_1)$ tend vers $f'(x_0)$. Ainsi, la famille de droites (M_0M_1) lorsque x_1 tend vers M_0 a une position limite : la droite T d'équation $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. T est appelé tangente à la courbe C_f en M_0.

Exemple 5.1.2 (Dérivées des fonctions usuelles) – Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array} \right.$. Soit encore $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} &= \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \\ &= \frac{(x-x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}}{(x-x_0)} \\ &= x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1} \end{aligned}$$

et donc $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = nx_0^{n-1}$.

– Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$. En $x_0 \neq 0$ on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{xx_0} \frac{x_0 - x}{x - x_0} \\ &= -\frac{1}{x_0^2}. \end{aligned}$$

et donc g est dérivable en x_0 et $g'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.

– La fonction exponentielle est dérivable sur en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\exp'(x_0) = exp(x_0)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} e^{x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0} \\ &= \lim_{t \to 0} e^{x_0} \frac{e^t - 1}{t} \\ &= e^{x_0} \end{aligned}$$

– La fonction ln est dérivable en tout $x_0 > 0$ et $\ln'(x_0) = \frac{1}{x_0}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{\ln(x) - \ln(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{x_0} \frac{\ln \frac{x}{x_0}}{\frac{x}{x_0} - 1} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{x_0} \frac{\ln(t+1)}{t} \\ &= \frac{1}{x_0} \end{aligned}$$

– Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $cos'(x_0) = -\sin(x_0)$ et $\sin'(x_0) = \cos(x_0)$:

$$\cos(x + x_0) - \cos x_0 = \cos x \cos x_0 - \sin x_0 \sin x - \cos x_0 = \cos x_0 (\cos x - 1) - \sin x \sin x_0$$

donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x + x_0) - \cos(x_0)}{x} = \lim_{x \to 0} x \cos x_0 \frac{(\cos x - 1)}{x^2} - \frac{\sin x}{x} \sin x_0 = -\sin x_0.$$

$$\sin(x + x_0) - \sin x_0 = \sin x \cos x_0 + \sin x_0 \cos x - \sin x_0 = \sin x \cos x_0 + \sin x_0 (\cos x - 1)$$

donc

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x + x_0) - \sin(x_0)}{x} = \lim_{x \to 0} \cos x_0 \frac{\sin x}{x} - \frac{\cos x - 1}{x^2} x \sin x_0 = \cos x_0.$$

Proposition 5.1.3 *f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ et une fonction ε définie au voisinage de 0 telle que*

$$\begin{aligned} &f(x_0 + h) = f(x_0) + ha + h\varepsilon(h), \\ &\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Dans ce cas $a = f'(x_0)$.

Remarque : L'expression (5.1) est appelée développement limité de f à l'ordre 1 en x_0.
On peut reformuler (5.1) en écrivant $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)a + (x - x_0)\tilde{\varepsilon}(x)$ avec $\lim_{x \to x_0} \tilde{\varepsilon}(x) = 0$.
Preuve : Si f est dérivable en x_0 on pose $\varepsilon(h) = f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ et $a = f'(x_0)$. Alors on a $f(x_0 + h) = f(x_0) + ah + h\varepsilon(h)$ et $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$.
Réciproquement, on a $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} a + \varepsilon(h) = a$ donc f est dérivable et $f'(x_0) = a$.

Proposition 5.1.4 Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Preuve : On écrit $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) = f(x_0)$ et donc f est continue.

Remarque : la réciproque est fausse. Par exemple $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$ est continue en 0 mais non dérivable en 0.

Définition 5.1.5 – Soit f une fonction définie sur un intervalle non vide de la forme $]a, x_0]$. On dira que f est dérivable à gauche de x_0 si la limite $\lim_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$ existe. On pose alors $f'(x_0^-) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}$.

– Soit f une fonction définie sur un intervalle non vide de la forme $[x_0, b[$. On dira que f est dérivable à droite de x_0 si la limite $\lim_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe. On pose alors $f'(x_0^+) = \lim_{\substack{h\to 0 \\ h>0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Exemple 5.1.6 La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |x| \end{array} \right.$ est dérivable à gauche et à droite de 0 : $f'(x_0^+) = 1$ et $f'(x_0^-) = -1$.

Proposition 5.1.7 f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite de x_0 et $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

Dans ce cas on a $f'(x_0^+) = f'(x_0^-) = f'(x_0)$.

5.2 Opération sur les dérivées

Proposition 5.2.1 Soit $f :]a, b[\to]c, d[$ et $g :]c, d[\to \mathbb{R}$ deux fonctions, $x_0 \in]a, b[$ tels que f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Preuve : Comme f est dérivable en x_0 on a pour tout h proche de 0

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$$

avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$. Ensuite comme g est dérivable en $f(x_0)$ on a pour tout $\tilde{h}$ proche de 0

$$g(f(x_0) + \tilde{h}) = g(f(x_0)) + \tilde{h}g'(f(x_0)) + \tilde{h}\tilde{\varepsilon}(\tilde{h}).$$

avec $\lim_{h\to 0} \tilde{\varepsilon}(h) = 0$.
Ainsi, pour $\tilde{h} = hf'(x_0) + h\varepsilon(h)$ on a

$$\begin{aligned} g(f(x_0) + \tilde{h}) &= g(f(x_0)) + (hf'(x_0) + h\varepsilon(h))g'(f(x_0)) + (hf'(x_0) + h\varepsilon(h))\tilde{\varepsilon}(hf'(x_0) + h\varepsilon(h)) \\ &= g(f(x_0)) + hf'(x_0)g'(f(x_0)) + h(\varepsilon(h)g'(f(x_0)) + (f'(x_0) + \varepsilon(h))\tilde{\varepsilon}(hf'(x_0) + h\varepsilon(h)). \end{aligned}$$

On pose $\hat{\varepsilon}(h) = g'(f(x_0))\varepsilon(h) + (f'(x_0) + \varepsilon(h))\tilde{\varepsilon}(hf'(x_0) + h\varepsilon(h))$. Alors $\hat{\varepsilon}(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0 et

$$g \circ f(x_0 + h) \quad = \quad g \circ f(x_0)) + hf'(x_0)g'(f(x_0)) + h\hat{\varepsilon}(h).$$

Ainsi $g \circ f$ est dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$.

Exemple 5.2.2 La dérivée de la fonction puissance $f_a : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow &]0, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^a = e^{a \ln x} \end{array} \right.$ est dérivable quel que soit $x_0 \in]0, +\infty[$ et $f'_a = af_{a-1}$.

Les opérations que nous avons pour les limites et les fonctions sont encore valables pour la dérivabilité :

Proposition 5.2.3 Soit I un intervalle, f et g deux fonctions définies sur I, $x_0 \in I$, a un réel. Alors

1. Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en x_0 alors $f+g$ est dérivable en x_0 et $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
2. Si f est dérivable en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0). = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$.
3. Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en x_0 alors fg est dérivable en x_0 et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
4. Si f est dérivable en x_0 alors af est dérivable en x_0 et $(af)'(x_0) = a \cdot f'(x_0)$.
5. Si f est dérivable en x_0 et si g est dérivable en x_0 alors $f-g$ est dérivable en x_0 et $(f-g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$.
6. Si f est dérivable en x_0, si g est dérivable en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$ alors $\frac{g}{f}$ est dérivable en x_0 et $\left(\frac{g}{f}\right)'(x_0) = \frac{g'(x_0)f(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{f(x_0)^2}$.

Preuve : 1) est une conséquence directe de la limite d'une somme.
2) Par hypothèse $f'(x_0) \neq 0$ donc la dérivée de $h : x \mapsto \frac{1}{x}$ en $f(x_0)$ est $-\frac{1}{f(x_0)^2}$. La formule de la dérivée d'une composée donne alors $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2}$.
3) On écrit

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{fg(x) - fg(x_0)}{x - x_0} &= \lim x \to x_0 \frac{(f(x) - f(x_0))g(x) + (g(x) - g(x_0))g'(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f'(x_0).\end{aligned}$$

4) on applique (3) avec g la fonction constante : On a $g'(x_0) = 0$ et donc $(af)'(x_0) = a \cdot f'(x_0)$.
5) est une conséquence de (4) et de (1).
6) est une conséquence de (2) et (3)

Exemple 5.2.4 La fonction tangente est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $\tan'(x_0) = \tan^2(x_0) + 1 = \frac{1}{\cos^2 x_0}$. En effet, sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et cosinus ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ donc $\tan'(x_0) = \frac{\sin'(x_0)\cos(x_0) - \cos'(x_0)\sin(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \frac{\cos^2(x_0) + \sin^2(x_0)}{\cos^2(x_0)} = \tan^2(x_0) + 1 = \frac{1}{\cos^2 x_0}$.

5.3 Dérivées d'ordre supérieures

Définition 5.3.1 (Dérivées d'ordres supérieurs) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et f' sa fonction dérivée. Si f' est dérivable sur I, $(f')'$, la fonction dérivée de f', est appelée dérivée seconde de f. On la note f'' ou $f^{(2)}$. On dit alors que f est dérivable deux fois sur I.
On définit ainsi par récurrence la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f : si $f^{(n-1)}$, la dérivée $n-1^{\text{ième}}$ de f est définie et dérivable sur I, on note $f^{(n)}$ la fonction dérivée de $f^{(n-1)}$: $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$. $f^{(n)}$ est aussi appelé dérivée d'ordre n.

Exemple 5.3.2 La dérivée seconde de cosinus est -cosinus, la dérivée troisième de cosinus est -sinus et la dérivée quatrième de cosinus est cosinus.

Définition 5.3.3 On dira que f est de classe C^n sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I. On dira alors que f est n-fois continument dérivable sur I. On note $C^n(I)$ l'ensemble des fonctions n-fois continument dérivable sur I.
On dira que f est indéfiniment dérivable sur I si les dérivées de tout ordre de f existe.On note $C^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I.

Proposition 5.3.4 (Formule de Liebniz) Soient f et g deux fonctions de n fois dérivable sur I. Alors

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Preuve : On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$ la proposition est vraie car $(fg)' = f'g + g'f$. Supposons la proposition établie au rang $n - 1$. Alors

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n)} &= \left((fg)^{(n-1)}\right)' \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)} g^{(n-1-k)}.\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(\left(f^{(k)}\right)' g^{(n-1-k)} + f^{(k)} \left(g^{(n-1-k)}\right)'\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k \left(f^{(k+1)} g^{(n-1-k)} + f^{(k)} g^{(n-k)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)} g^{(n-k)} \\
&= f^{(n)} + \sum_{k=1}^{n-1} (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k) f^{(k)} g^{(n-k)} + g^{(n)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}.
\end{aligned}$$

5.4 Minimum, maximum et conséquences

5.4.1 Minimum, maximum

Définition 5.4.1 Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$. nous dirons que f atteint un maximum (reps. minimum) local en x_0 s'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ on ait $f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$). la valeur $f(x_0)$ est appelé maximum (resp. minimum) local ou relatif de f.
Nous dirons que le maximum ou le minimum est strict lorsque l'inégalité ci-dessus est stricte pour tout $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\setminus\{x_0\}$.
Nous dirons que le maximum ou le minimum est global sur I si l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $x \in I$.

Exemple 5.4.2 La fonction $x \mapsto x^2$ atteint son minimum 0 sur $\mathbb{R}$ en 0. C'est un minimum global et strict.

Proposition 5.4.3 Soient I un intervalle, x_0 un point intérieur de I, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0 tel que $f(x_0)$ est un maximum ou un minimum de local de f.
Alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve : Supposons que $f(x_0)$ soit un maximum de f, le cas où $f(x_0)$ est un minimum se traite de même. Raisonnons par l'absurde et supposons que $f'(x_0) \neq 0$.
On écrit alors $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
Si $f'(x_0) > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\varepsilon(x) > -f'(x_0)$ quel que soit $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$. On a pour $x \in [x_0, x_0 + \eta[$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) > f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) =$$

donc $f(x_0)$ n'est pas un maximum local de f. Si $f'(x_0) < 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\varepsilon(x) < f'(x_0)$ quel que soit $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$. On a pour $x \in [x_0 - \eta, x_0[$:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x) < f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) = f(x_0)$$

et donc $f(x_0)$ n'est pas un minimum local de f. C'est absurde. Donc $f'(x_0) = 0$.

5.4.2 Théorème de Rolle et accroissements finis

Théorème 5.4.4 (Théorème de Rolle) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ tel que $f(a) = f(b)$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

Preuve : Si f est constante alors $f' = 0$ sur $]a, b[$ et le théorème est démontré.
Sinon, comme f est continue sur $[a, b]$, il existe $c_1, c_2 \in [a, b]$ tel que $f(c_1) = \max_{[a,b]} f$ et $f(c_1) = \min_{[a,b]} f$. Comme f n'est pas constante et que $f(a) = f(b)$, c_1 ou c_2 n'appartient pas à $\{a, b\}$, par exemple c_1. Alors $f(c_1)$ est un maximum de f et $f'(c_1) = 0$ d'après la proposition précédente et donc $c = c_1$ convient.

Corollaire 5.4.5 (Théorème des accroissements finis) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

Preuve : On applique le théorème de Rolle à la fonction $g(x) = (x-b)(f(x)-f(a))-(x-a)(f(x)-f(b))$. $g(a) = 0$ et $g(b) = 0$ donc il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$ d'après le théorème de Rolle. De plus

$$g'(x) = f(x) - f(a) + (x - b)f'(x) - f(x) + f(b) - (x - a)f'(x) = f(b) - f(a) + (a - b)f'(x)$$

d'où $f'(c) = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

Corollaire 5.4.6 (Inégalités des accroissements finis) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$.
Alors pour tout $x, y \in [a, b]$ tel que $x \neq y$ on a $\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \leq \sup_{]x,y[} |f'|$.

Preuve : On applique seulement le théorème des accroissements finis sur $[x, y]$ où f' est continue donc $\sup_{[x,y]} |f'|$ existe.

5.4.3 Dérivée et variation

Proposition 5.4.7 (Lien entre la dérivée et les variations) Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$ tel que $f' \geq 0$ (resp $f' \leq 0$) sur $[a, b]$. Alors f est croissante (resp. décroissante) sur $[a, b]$. Si de plus l'inégalité est stricte, alors f est strictement croissante (resp. décroissante).

Preuve : On suppose $f' \geq 0$. Soit $x, x' \in [a, b]$ tel que $x < x'$ Alors d'après le théorème des accroissements finis on a $f(x) - f(x') = (x - x')f'(c)$ pour un $c \in]x, x'[$. Or $x - x' < 0$ et $f'(c) \geq 0$ car $f' \geq 0$ donc $f(x) \leq f(x')$. Si $f' > 0$ alors $f'(c) > 0$ et $f(x) < f'(x)$.
On procède de même lorsque f' est négative.

Proposition 5.4.8 Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur l'intervalle I telle que $f' = 0$ sur I. Alors f est constante sur I.

Preuve : Soit $\alpha \in]a, b[$ fixé. Pour $x \in I$, $x \neq \alpha$, il existe $c \in]\alpha, x[$ ou $]x, \alpha[$ tel que $\frac{f(\alpha)-f(x)}{\alpha-x} = f'(c)$. Or $f'(c) = 0$ donc $f(x) = f(\alpha)$: f est constante sur I.
Remarque : le résultat est faux si I n'est pas un intervalle mais une réunion d'intervalles disjoints.

Exemple 5.4.9 **Proposition 5.4.10** Soient $a, b \in]0, +\infty[$. Alors $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
Preuve : Soit $b \in]0, +\infty[$. On montre que la fonction $f : x \mapsto \ln(xb) - \ln x$ est constante.
f est dérivable comme somme de fonctions dérivables. On a

$$f'(x) = \frac{b}{bx} - \frac{1}{x} = 0$$

Donc $f' = 0$ et f est constante sur $]0, +\infty[$. Or $f(1) = \ln b$ d'où pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\ln(bx) = \ln x + \ln b$.

5.4.4 Règle de l'Hôpital

Proposition 5.4.11 (Théorème de accroissements finis généralisés) Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ tel que $g'(x) \neq 0$ quel que soit $x \in]a, b[$.
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$.

Preuve : On applique le théorème de Rolle à la fonction $h(x) = (g(x) - g(b))(f(x) - f(a)) - (g(x) - g(a))(f(x) - f(b))$. On a $h(a) = 0$ et $h(b) = 0$ donc d'après le théorème de Rolle il existe $c \in]a, b[$ tel que $h'(c) = 0$. De plus

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(x)(f(x) - f(a)) + (g(x) - g(b))f'(x) - g'(x)(f(x) - f(b)) - (g(x) - g(a))f'(x) \\ &= g'(x)f(b) - f(a) + (g(a) - g(b))f'(x). \end{aligned}$$

De plus $g'(c) \neq 0$ car g' ne s'annulle par sur $]a, b[$ et $g(a) - g(b) \neq 0$ sinon il existerait γ tel que $g'(\gamma) = 0$ d'après le théorème de Rolle. Ainsi, on en déduit que $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(a)-f(b)}{g(a)-g(b)}$.

Proposition 5.4.12 (Règle de l'hôpital) Soit $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$, dérivables sur $]a, b[$ tel que $g'(x) \neq 0$ quel que soit $x \in]a, b[$, $x \neq x_0$. Soit encore $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = g(x_0) = 0$. On suppose que $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe.
Alors $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Preuve : Soit $x \in]a, b[$, $x \neq x_0$. Alors $g(x) \neq 0$ sinon d'après le théorème de Rolle il existerait c tel que $g'(c) = 0$.
On a alors d'après le théorème des accroissements finis généralisés

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

où c_x dépend de x et appartient à $]x, x_0[$ ou $]x_0, x[$. On a donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g(c_x)}.$$

Lorsque x tend vers x_0, c_x tend aussi vers x_0. Comme la limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, on a $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Ainsi $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
Remarque : Le résultat est valable même si la limite est infinie.
On peut "itérer" et faire intervenir les dérivées d'ordres supérieurs.

Exemple 5.4.13 On cherche à calculer $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$. On a :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} &= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x + x}{4x^3} \text{ si cette limite existe} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x + 1}{12x^2} \text{ si cette limite existe} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{24x} \text{ si cette limite existe} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{24} = -\frac{1}{24} \end{aligned}$$

d'où $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{1}{24}$.

5.4.5 Dérivées et fonctions réciproques

Proposition 5.4.14 Soit $f : I \to f(I)$ une fonction continue, bijective, dérivable en $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) \neq 0$. Alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ et $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Preuve : On pose $y_0 = f(x_0)$. Comme f est continue, f^{-1} est continue et donc $\lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$. Ainsi

$$\begin{aligned}\lim_{y\ toy_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} &= \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} \\ &= \frac{1}{f'(x_0)}\end{aligned}$$

Corollaire 5.4.15 Soit $f : [a,b] \to f([a,b])$ une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, strictement monotone sur $[a,b]$. Alors f est bijective, f^{-1} est strictement monotone de même sens de variation que f, est continue sur $f([a,b])$, dérivable sur $f(]a,b[)$ et pour tout $y \in f(]a,b[)$, $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f(f^{-1}(y))}$.

Preuve : Nous avons déjà vu sous ces hypothèses que f^{-1} est continue, strictement monotone et a même sens de variation que f. Quant à la dérivée, comme f est strictement monotone, f' ne s'annule pas sur $]a,b[$ et nous pouvons donc appliquer la proposition précédente.

Exemple 5.4.16 Les fonctions arccos, arcsin et arctan sont dérivables sur leurs domaines de définition respectifs et

$$\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}},\ \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Démontrons ces formules pour la fonction arctangente par exemple :

$$\begin{aligned}\arctan'(y) &= \frac{1}{\tan'(\arctan(y))} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(y))} \\ &= \frac{1}{1+y^2}\end{aligned}$$

Pour la fonction arcsinus :

$$\begin{aligned}\arcsin'(y) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin(y))} \\ &= \frac{1}{\cos(\arcsin(y))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.\end{aligned}$$

Chapitre 6

Fonctions trigonométriques et hyperboliques réciproques

6.1 Théorème général

Nous allons dans le théorème suivant condenser toutes les propriétés concernant les fonctions bijectives et leurs réciproques.

Théorème 6.1.1 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. Alors :
- f est une bijection de I sur $J = f(I)$. Sa fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est aussi strictement monotone et a le même sens de variation que f. La courbe représentative de f^{-1} est la symétrique de celle de f par rapport à la droite $y = x$.
- Si de plus f est continu, alors f^{-1} est continue et J est un intervalle.
- Si de plus f est dérivable sur I alors $f'(x) > 0$ quel que soit x à l'intérieur de I ou $f'(x) < 0$ quel que soit x à l'intérieur de I, f^{-1} est dérivable sur J et pour tout $y \in J$ on a $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$.

6.2 Fonction Arcsinus

Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \sin x \end{array} \right.$$

f est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, continue sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. De plus $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, 1]$.
f est donc une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. La fonction réciproque de sinus est par définition la fonction arcsinus :

$$\arcsin : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1, 1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ y & \longmapsto & \arcsin(y) = x, \text{où } x \text{ est l'unique élément de } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } \sin x = y \end{array} \right. .$$

Proposition 6.2.1 La fonction arcsinus est strictement croissante sur $[-1, 1]$, continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ et pour tout $y \in]-1, 1[$ on a $\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème général. Pour le calcul de la dérivée, quel que soit $y \in]-1, 1[$ on a $\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos x}$ où $x = (\arcsin y)$. D'autre part, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\cos x > 0$ car $x = \arcsin y$ appartient $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$. Or $\sin(arcsiny) = y$ quel que soit $y \in [-1, 1]$ donc

$\cos x = \sqrt{1-y^2}$.
Représentation graphique :

6.3 Fonction Arccosinus

Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \cos x \end{array} \right.$$

f est strictement décroissante sur $[0,\pi]$, continue sur $[0,\pi]$ et dérivable sur $[0,\pi]$. De plus $f([0,\pi]) = [-1,1]$.
f est donc une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. La fonction réciproque de cosinus est par définition la fonction arccosinus :

$$\arccos : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1,1] & \longrightarrow & [0,\pi]] \\ y & \longmapsto & \arccos(y) = x, \text{où } x \text{ est l'unique élément de } [0,\pi] \text{ tel que } \cos x = y \end{array} \right. .$$

Proposition 6.3.1 La fonction arccosinus est strictement croissante sur $[-1,1]$, continue sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $y \in]-1,1[$ on a $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème général. Pour le calcul de la dérivée, quel que soit $y \in]-1,1[$ on a $\arccos'(y) = -\frac{1}{\sin x}$ où $x = (\arccos y)$. D'autre part, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\sin x > 0$ car $x = \arccos y$ appartient $]0,\pi[$ donc $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x}$. Or $\cos(\arccos y) = y$ quel que soit $y \in [-1,1]$ donc $\cos x = \sqrt{1-y^2}$.

Représentation graphique :

6.4 Fonction Arctangente

Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \tan x \end{array} \right.$$

f est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. De plus $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$. f est donc une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. La fonction réciproque de tangente est par définition la fonction arctangente :

$$\arctan : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ y & \longmapsto & \arctan(y) = x, \text{où } x \text{ est l'unique élément de }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ tel que } \tan x = y \end{array} \right. .$$

Proposition 6.4.1 La fonction arctangente est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a $\arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}$.

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème général. Pour le calcul de la dérivée, quel que soit $y \in \mathbb{R}$ on a $\arctan(y) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}$.

Représentation graphique :

6.5 Fonctions Hyperboliques

Par analogie au sinus, cosinus et tangente vus par la formule d'Euler, on définit les fonctions hyperboliques :

$$\mathrm{Sh} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Sh(x)} = \frac{\mathrm{e^x - e^{-x}}}{2} \end{array} \right. ,$$

$$\mathrm{Ch} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Ch(x)} = \frac{\mathrm{e^x + e^{-x}}}{2} \end{array} \right. .$$

On remarque que $\mathrm{Ch(x)} \geq 1$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$ donc on peut définir

$$\mathrm{Th} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{Th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array} \right. .$$

On a le formulaire suivant, analogue à celui des fonctions trigonométriques :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Chx + Shx} & = & e^x \\ \mathrm{Chx - Shx} & = & e^{-x} \\ \mathrm{Ch(a+b)} & = & \mathrm{ChaChb + ShaShb} \\ \mathrm{Ch(a-b)} & = & \mathrm{ChaChb - ShaShb} \\ \mathrm{Sh(a+b)} & = & \mathrm{ShaChb + ChaShb} \\ \mathrm{Sh(a-b)} & = & \mathrm{ShaChb - ChaShb} \end{array}$$

Les fonctions Sh, Ch et Th sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$. On a $\mathrm{Sh}' = \mathrm{Ch}$, $\mathrm{Ch}' = \mathrm{Sh}$ et $\mathrm{Th}' = 1 - \mathrm{Th}^2 = \frac{1}{\mathrm{Ch}^2}$.

La fonction Ch est paire, les fonctions Sh et Th sont impaires.
Représentations graphiques :

6.6 Fonctions Hyperboliques Réciproques

6.6.1 Argument sinus hyperbolique

La fonction Sh est continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque $\mathrm{Sh}' = \mathrm{Ch} > 0$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Sa fonction réciproque est par définition la fonction Argument Sinus Hyperbolique : ArgSh :

$$\mathrm{ArgSh} : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \mathrm{ArgSh(y) = x \text{ où } xest \text{ l'unique réel tel que } Shx = y} \end{array} \right. .$$

Proposition 6.6.1 La fonction ArgSh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}$ on a$\mathrm{ArgSh}'(\mathrm{y}) = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{y}^2}}$.

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème général. Pour le calcul de la dérivée, quel que soit $y \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{ArgSh}'(\mathrm{y}) = -\frac{1}{\mathrm{Chx}}$ où $x = \mathrm{ArgShy}$. D'autre part, $\mathrm{Ch^2x - Sh^2 = 1}$ et $\mathrm{Chx} > 0$ donc $\mathrm{Chx} = \sqrt{1 + \mathrm{Sh^2x}}$. Or $\mathrm{Sh(ArgShy) = y}$ quel que soit $y \in \mathbb{R}$ donc $\mathrm{ArgSh}'(\mathrm{y}) = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{y}^2}}$.

Représentation graphique :

6.6.2 Argument cosinus hyperbolique

La fonction Ch est continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ puisque $\mathrm{Ch}' = \mathrm{Sh} > 0$ sur $\mathbb{R}^+$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$. Sa fonction réciproque est par définition la fonction Argument cosinus Hyperbolique : ArgCh :

$$\mathrm{ArgCh} : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & [1, +\infty[\\ y & \longmapsto & \mathrm{ArgCh(y) = x \text{ où } x\text{est l'unique réel tel que } Chx = y} \end{array} \right. .$$

Proposition 6.6.2 La fonction ArgCh est strictement croissante et continue sur sur $[1, +\infty[$, dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout $y \in]1, +\infty[$ on a$\mathrm{ArgCh}'(\mathrm{y}) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{y}^2-1}}$.

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème général. Pour le calcul de la dérivée, quel que soit $y \in \mathbb{R}$ on a $\mathrm{ArgCh}'(\mathrm{y}) = -\frac{1}{\mathrm{Shx}}$ où $x = \mathrm{ArgChy}$. D'autre part, $\mathrm{Ch^2x - Sh^2 = 1}$ et $\mathrm{Shx} > 0$ pour tout $x > 0$ donc $\mathrm{Shx} = \sqrt{\mathrm{Ch^2x - 1}}$. Or $\mathrm{Ch(ArgChy) = y}$ quel que soit $y \in [1, +\infty[\mathbb{R}$ donc $\mathrm{ArgCh}'(\mathrm{y}) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{y}^2-1}}$.

Représentation graphique :

6.6.3 Argument tangente hyperbolique

La fonction Th est continue, dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puisque $\mathrm{Th}' = \frac{1}{\mathrm{Ch}^2} > 0$ sur $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathrm{Th}(\mathbb{R}) =]-1,1[$. Sa fonction réciproque est par définition la fonction Argument tangente Hyperbolique : ArgTh :

$$\mathrm{ArgTh} : \left\{ \begin{array}{ccl}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \mathrm{ArgTh(y) = x\ où\ xest\ l'unique\ réel\ tel\ que\ Thx = y} \end{array} \right. .$$

Proposition 6.6.3 La fonction ArgTh est strictement croissante, continue et dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout $y \in]-1,1[$ on a$\mathrm{ArgTh}'(\mathrm{y}) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{y}^2-1}}$.

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème général. Pour le calcul de la dérivée, quel que soit $y \in]-1,1[$ on a $\mathrm{ArgTh}'(\mathrm{y}) = \frac{1}{1-\mathrm{Th}^2\mathrm{x}}$ où $x = \mathrm{ArgThy}$. Comme $\mathrm{Th(ArgThy) = y}$ quel que soit $y \in]-1,1[$, on a $\mathrm{ArgTh}'(\mathrm{y}) = \frac{1}{1-\mathrm{y}^2}$.

Représentation graphique :