Chapitre 4

Fonctions Réelles et Continuité

On utilisera la notation suivante : Si I est intervalle de la forme $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$ ou $]a,b[$, on notrera $\overline{I}$ l'intervalle $[a,b]$.

4.1 Limites

4.1.1 Définitions

Définition 4.1.1 (Limites finies) Soit I un intervalle borné, $x_0 \in \overline{I}$ et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$.

- On dira que f admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite à gauche de x_0 ou encore quand x tend vers x_0 par valeurs inférieures à x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, x_0 - \eta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

  On notera $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$.
- On dira que f admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite à droite de x_0 ou encore quand x tend vers x_0 par valeurs supérieures à x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

  On notera $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$.
- On dira que f admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite en x_0 ou encore quand x tend vers x_0 si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, x_0 - \eta < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

  On notera $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$.

Exemple 4.1.2 Soit $E : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & E(x) \end{array} \right.$ la partie entière. Alors

- $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} E(x) = 0$.
- $\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} E(x) = 1$.
- E n'a pas de limite lorsque x tend vers 1.

Exemple 4.1.3 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$.
Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$x^n - x_0^n = (x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}).$$

Pour $|x| < |x_0| + 1$ on a

$$|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \ldots + x_0^{n-1}| \leq |x^{n-1}| + |x^{n-2}x_0| + \ldots + |x_0^{n-1}| < n(|x_0| + 1)^{n-1}.$$

Donc si $|x - x_0| < \min\left(\frac{\varepsilon}{n}, 1 + |x_0|\right)$ on a $|x^n - x_0^n| < \varepsilon$.

Théorème 4.1.4 f admet l comme limite en x_0 si et seulement si f admet l comme limite à droite et à gaughe de x_0.

Définition 4.1.5 (Limites infinies) Soit $I =]a, b[$ un intervalle borné et $f : I \to \mathbb{R}$.

– On dira que f tend vers plus l'infini lorsque x tend vers b par valeurs inférieures à b si et seulement si
$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, b - \eta < x < b \Rightarrow f(x) > M.$$
On notera $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty$.

– On dira que f tend vers moins l'infini lorsque x tend vers b par valeurs inférieures à b si et seulement si
$$\forall M < 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, b - \eta < x < b \Rightarrow f(x) < M.$$
On notera $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = -\infty$

– On dira que f tend vers plus l'infini lorsque x tend vers a par valeurs supérieures à a si et seulement si
$$\forall M > 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, a < x < a + \eta \Rightarrow f(x) > M.$$
On notera $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$.

– On dira que f tend vers moins l'infini lorsque x tend vers a par valeurs supérieures à a si et seulement si
$$\forall M < 0,\ \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, a < x < a + \eta \Rightarrow f(x) < M.$$
On notera $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$

Exemple 4.1.6 On a $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$.
Soit $M > 0$. Pour $0 < x < \frac{1}{M}$ on a $\frac{1}{x} > M$ et comme M est quelconque, cela montre que $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$.
Soit $M < 0$. Pour $0 > x > \frac{1}{M}$ on a $\frac{1}{x} < M$ et comme M est quelconque, cela montre que $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$.

Définition 4.1.7 (Limites à l'infini) Soit $I =]a, +\infty[$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$.

– On dira que la fonction f tend vers le réel l lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x, M < x \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$
On notera $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$.

– On dira que la fonction f tend vers plus (resp. moins) l'infini lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si
$$\forall N > 0 \text{ (resp. } N < 0\text{)},\ \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x, M < x \Rightarrow f(x) > N \text{ (resp. } f(x) < N\text{)}.$$
On notera $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On définit de même la limite en moins l'infini.

Exemple 4.1.8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si n est pair :
$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n = +\infty$$
et si n est impair,
$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty.$$
En effet, soit $N > 0$ donné. Alors pour $x \geq \max(1, N)$ on a $x^n \geq x \geq N$ et donc $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$. Les limites en $-\infty$ se traitent de la même manière.

Proposition 4.1.9 On a les limites suivantes

1. $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$

Preuve : On montre par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\ln(2^n) = n \ln 2$.
1) Soit $M > 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédéen, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \ln 2 > M$. Ainsi pour tout $x > 2^N$ on a puisque ln est croissante

$$\ln x > \ln(2^N) = N \ln 2 > M.$$

2) On a $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$. En effet, pour tout $n \geq 4$ on montre par récurrence que $n^2 \leq 2^n$. Ainsi $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{1}{n}$ et comme $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, le théorème des gendarmes implique que $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ implique $\frac{n \ln 2}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit alors $x > 2^N$. Il existe $n \geq N$ tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$. On a alors

$$\frac{\ln x}{x} \leq \frac{(n+1)\ln 2}{x} \leq \frac{(n+1)\ln 2}{2^n} < 2\frac{(n+1)\ln 2}{2^{n+1}} < \varepsilon.$$

4.1.2 Opérations sur les limites

Les opérations que nous avons pour les limites de suites sont encore valables dans le cas des fonctions :

Proposition 4.1.10 (Opération sur les limites) Soit I un intervalle, f et g deux fonctions définies sur I, $x_0 \in I$ éventuellement infini, a un réel. Alors

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ implique $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$.
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = l'$ implique $\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = l + l'$.
3. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = l'$ implique $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = ll'$.
4. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \neq 0$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = l'$ implique $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{l'}{l}$.

Exemple 4.1.11 Soit $P(x) = p_n x^n + \ldots, +p_0$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n > 0$. Alors si n est pair :

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$$

En effet :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} P(x) &= \lim_{x\to+\infty} p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_0 \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^n(p_n + p_{n-1}x^{-1} + \ldots + p_0 x^{-n}) \\
&= \lim_{x\to+\infty} x^n p_n = +\infty.
\end{aligned}$$

De même pour la limite en $-\infty$.

Proposition 4.1.12 Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $x_0 \in X$ tels que $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ appartient à Y et $\lim_{y\to y_0} g(y) = l$. Alors $\lim_{x\to x_0} g \circ f(x) = l$.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que $|y - y_0| < \eta$ implique $|g(y) - l| < \varepsilon$.
Ensuite il existe $\eta' > 0$ tel $|x - x_0| < \eta'$ implique $|f(x) - y_0| < \eta$.
Alors quel que soit x tel que $|x - x_0| < \eta'$, on a $|g \circ f(x) - l| < \varepsilon$.

Proposition 4.1.13 On a les limites suivantes

1. $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \ln x = -\infty$.
2. $\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} x \ln x = 0$.

Preuve :

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -\ln\frac{1}{x} \text{ car } \ln x - \ln\frac{1}{x} = \ln(x/x) = \ln 1 = 0\\
&= \lim_{X\to+\infty} -\ln X \text{ en posant } X = \frac{1}{x}\\
&= -\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x &= \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -x\ln\frac{1}{x} \text{ car } \ln x - \ln\frac{1}{x} = \ln(x/x) = \ln 1 = 0\\
&= \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln X}{X} \text{ en posant } X = \frac{1}{x}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

4.1.3 Comparaisons et limites

Définition 4.1.14 Soit V un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que V est un voisinage ouvert de x_0 s'il existe $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ soit inclus dans V.

Théorème 4.1.15 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction telle que
– Il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap I$ on ait $f(x) \geq \lambda$,
– $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0.
Alors $l \geq \lambda$

Preuve : Supposons qu'on ait $\lambda > l$ et soit $\varepsilon = \frac{\lambda - l}{2} > 0$.
Il existe $\eta_1 > 0$ tel que $]x_0 - \eta_1, x_0 + \eta_1[\subset V$. Il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $|x - x_0| < \eta_2$ implique $|f(x) - l| < \varepsilon$.
Ainsi pour tout $x \in I$ tel que $|x - x_0| < \eta_1$ et $|x - x_0| < \eta_2$, on a

$$0 < \lambda - l \leq f(x) - l < \varepsilon = \frac{\lambda - l}{2}$$

et c'est absurde. donc $\lambda \leq l$.

Théorème 4.1.16 Soit X un sous ensemble de $\mathbb{R}$, f et g deux fonctions définies sur X, $x_0 \in X$. On suppose que
– Il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap X$ on ait $f(x) \geq g(x)$,
– $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0 et $g(x)$ tend vers l' lorsque x tend vers x_0.
Alors $l \geq l'$

Preuve : On applique le théorème précédent $h = f - g$

Théorème 4.1.17 (des gendarmes) Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, $x_0 \in X$ et f, g, h trois fonctions définies sur X telles que
– il existe un voisinage ouvert V de x_0 tel que pour tout $x \in V \cap X$ on ait $f(x) \geq g(x) \geq h(x)$,
– $f(x)$ et $h(x)$ tendent vers l lorsque x tend vers x_0.
Alors $g(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$, il existe $\eta_1 > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $|x - x_0| < \eta_1$ implique $|f(x) - l| < \varepsilon$.
Comme $\lim_{x\to x_0} h(x) = l$, il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $|x - x_0| < \eta_1$ implique $|h(x) - l| < \varepsilon$.
Soit $\eta < \min(\eta_1, \eta_2)$ tel que $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\subset V$. Alors pour tout $x \in X$ tel que $|x - x_0| < \eta$ on a

$$-\varepsilon \leq h(x) - l < g(x) - l \leq f(x) - l < \varepsilon.$$

Proposition 4.1.18 On a limite suivante $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Preuve : En comparant les aires des rectangles de longueur 1 et de largeur x, de longueur $\frac{1}{x+1}$ et de largeur x et l'aire que mesure $\ln(x+1)$, on obtient

$$\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1) \leq x \quad \forall x > 0.$$

Ainsi

$$\frac{1}{x+1} \leq \frac{\ln(x+1)}{x} \leq 1 \quad \forall x > 0$$

et le théorème des gendarmes donne $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.
On démontre sur le même principe que $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$.

Théorème 4.1.19 Soit f et g définie sur un intervalle $I =]a,b[$. On suppose que
– Il existe un voisinage ouvert V de b tel que pour tout $x \in V \cap I$ on ait $f(x) \leq g(x)$,
– $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = +\infty$.
Alors $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} g(x) = +\infty$.
On a les résultat analogue suivant :

1. Si $f \leq g$ et $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} g(x) = +\infty$.
2. Si $f \geq g$ et $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = -\infty$ alors $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} g(x) = -\infty$.
3. Si $f \geq g$ et $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$ alors $\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} g(x) = -\infty$.

si $f \leq g$ et f tend vers $-\infty$ et en a.

Preuve : Soit $M > 0$. Il existe $\eta 8 > 0$ tel que $]b-\eta_1, b+\eta_1[\subset V$ et il existe $\eta_2 > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $b - \varepsilon < x < b$ implique alors $f(x) > M$.
Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Pour tout $x \in I$ tel que $b - \eta < x < b$ on a alors $g(x) > f(x) > M$ ce qui montre que $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} g(x) = +\infty$.

4.1.4 Limites des fonctions majorées et croissantes

Proposition 4.1.20 Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a,b[$ (b éventuellement infini), croissante et majorée. Alors f admet une limite finie à gauche en b. De même, si f est décroissante et minorée, elle admet une limite finie à gauche en b.

Preuve : On suppose f croissante et majorée. Soit $l = \sup_I f$ existe car f est majorée. On montre que f tend vers l lorsque x tend vers b.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) > l - \varepsilon$. On pose $\eta = b - x_0$. Alors comme f est croissante, quel que soit x tel que $x_0 = b - \eta < x < b$ on a $l \geq f(x) > l - \varepsilon$ et donc $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = l$.

Proposition 4.1.21 Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a,b[$ (b éventuellement infini), croissante et non majorée. Alors $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = +\infty$. De même, si f est décroissante et non minorée, $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = -\infty$.

Preuve : Soit $M > 0$. Comme f n'est pas majorée, il existe $x_0 \in]a,b[$ tel que $f(x_0) > M$. Ainsi pour tout $x \in]a,b[$, $x > x_0$ implique $f(x) > f(x_0) > M$. Comme $M > 0$ est quelconque, on a donc montré que $\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = +\infty$. On démontre de même l'autre résultat.

Proposition 4.1.22 Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a,b[$ (a éventuellement infini), décroissante et majorée. Alors f admet une limite finie à gauche en a. De même, si f est croissante et minorée, elle admet une limite finie à gauche en a.

Proposition 4.1.23 Soit f une fonction définie sur un intervalle $I =]a, b[$ (a éventuellement infini), croissante et non minorée. Alors $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$. De même, si f est décroissante et non majorée, $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$.

Proposition 4.1.24 Soit f une fonction croissante définie sur un intervalle $I =]a, b[$. Alors f admet une limite à droite et à gauche en tout point de $]a, b[$.
Même résultat lorsque f est décroissante.

Preuve : on applique les deux propositions précédentes en tout point intérieur.

4.1.5 Définition séquentielle de la limite d'une fonction

Théorème 4.1.25 Soit I un intervalle, $\alpha \in I$ et f une fonction définie sur I. Alors

$$\lim_{\substack{x \to \alpha \\ x \neq \alpha}} f(x) = l$$

si et seulement si

quelle que soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$une suite d'éléments de I convergeant vers α on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = l$.

Preuve : $\Rightarrow$) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I convergeant vers α et soit $\varepsilon > 0$.
Comme $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers α, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|x - \alpha| < \eta$ implique $|f(x) - l| < \varepsilon$.
Ensuite comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ implique $|x_n - \alpha| < \eta$.
Ainsi pour tout $n \geq N$ on a $|f(x_n) - l| < \varepsilon$, donc $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = l$.
$\Leftarrow$) On raisonne par contraposée et on montre que si $\lim_{\substack{x \to \alpha \\ x \neq \alpha}} f(x) \neq l$ alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I convergeant vers α telle que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq l$.
comme f ne tend pas vers l lorsque x tend vers α, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x \in I$, dépendant de η, tel que $|x - \alpha| < \eta$ et $|f(x) - l| > \varepsilon$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit $\eta = \frac{1}{n}$. Il existe $x_n \in I$ tel que $|x_n - \alpha| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - l| > \varepsilon$.
Alors la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers α mais $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers l.

4.1.6 Existence de limite : critère de Cauchy

Proposition 4.1.26 (Critère de Cauchy) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction, $x_0 \in X$. Alors f admet une limite en x_0 si et seulement

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 / \forall x, x' \in X,\ |x - x_0| < \eta \text{ et } |x' - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Preuve : $\Rightarrow$) : On suppose que f admet une limite lorsque x tend vers x_0. Notons l cette limite.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $|x - x_0| < \eta$ implique $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Ainsi, pour tout $x, x' \in X$, $|x - x_0| < \eta$ et $|x' - x_0| < \eta$ implique

$$|f(x) - f(x')| = |f(x) - f(x_0) + f(x_0) - f(x')| < |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x')| < \varepsilon.$$

$\Leftarrow$) : On suppose maintenant que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0 / \forall x, x' \in X,\ |x - x_0| < \eta \text{ et } |x' - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon,$$

et on montre qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que pour toute suite (x_n) qui converge vers x_0, on a $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$. Ainsi, la définition séquentielle de la limite donnera $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$.
Première étape : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers x_0. Montrons que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, x' \in X$, $|x - x_0| < \eta$ et $|x' - x_0| < \eta$ implique $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

Ensuite comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x_0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ implique $|x_n - x_0| < \eta$.
Ainsi, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $n > N$ et $m > N$ implique $|x_n - x_0| < \eta$ et $|x_m - x_0| < \eta$ d'où $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$.
La suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est donc de Cauchy et comme $\mathbb{R}$ est complet, elle converge vers un certain l qui à priori dépend de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On montre maintenant que l ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Deuxième étape : On montre qu'en fait ne dépend pas de la suite (x_n). Soit $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite qui tend vers x_0. La suite $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et converge vers un certain l'.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $l \neq l'$. Alors $\varepsilon = \frac{|l-l'|}{2} > 0$.
Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall x, x' \in X,\ |x - x_0| < \eta$ et $|x' - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|x_n - x_0| < \eta$. De même il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$ on ait $|x'_n - x_0| < \eta$.
Alors pour tout $n \geq \max(N, N')$ on a

$$|f(x_n) - f(x'_n)| < \varepsilon = \frac{|l - l'|}{2}.$$

Lorsque n tend vers l'infini on obtient

$$0 < |l - l'| \leq \frac{|l - l'|}{2}$$

et c'est absurde ! Donc $l = l'$

4.2 Continuité

4.2.1 Définition

Définition 4.2.1 Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I.

- Lorsque x_0 un point intérieur de I, on dira que f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, autrement dit si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0/\ \forall x \in I,\ |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

  Si f n'est pas continue en x_0 elle est dite discontinue en x_0.
- Lorsque x_0 appartient $\overline{I}$, on dira que f est continue à gauche de x_0 si $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$, autrement dit si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0/\ \forall x \in I,\ x_0 - \eta < x < x_0 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

- Lorsque x_0 appartient $\overline{I}$, on dira que f est continue à droite de x_0 si $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = f(x_0)$, autrement dit si

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0/\ x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Proposition 4.2.2 *f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche de x_0.*

Exemple 4.2.3 La fonction ln est continue en tout $x_0 \in]0, +\infty[$:

$$\lim_{x\to x_0} \ln(x) - \ln(x_0) = \lim_{x\to x_0} \ln\frac{x}{x_0} = \lim_{t\to 0} \ln(t+1) = \lim_{t\to 0} t\frac{\ln(t+1)}{t} = 0.$$

Exemple 4.2.4 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & E(x) \end{array} \right.$ où E est la partie entière de x. Alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, f est continue en tout point de $]n, n+1[$. f est continue à droite de n mais est discontinue à gauche de n, en particulier, elle n'est pas continue en $n \in \mathbb{Z}$.

Théorème 4.2.5 (Définition séquentielle de la continuité) Soit I un intervalle, $\alpha \in I$ et f une fonction définie sur I. Alors f est continue en α si et seulement si

$$\text{quelle que soit la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ de } I \text{ convergeant vers } \alpha \text{ on a } \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\alpha).$$

Preuve : On applique simplement la définition séquentielle de la limite.

Proposition 4.2.6 Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to I$ continue et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in I$ on a $f(l) = l$.

Preuve : D'une part $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(l)$ car f est continue.
D'autre part, $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} u_n = l$.

Définition 4.2.7 Soit I un intervalle, $x_0 \in I$ et $f : I \setminus \{x_0\} :\to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x)$ existe.
La fonction

$$g : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{array}{l} f(x) \text{ si } x \neq x_0 \\ \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} f(x) \text{ sinon.} \end{array} \end{cases}$$

est appelé prolongement par continuité de f en x_0. En particulier, g est continue en x_0.

Exemple 4.2.8 La fonction $f : \begin{cases}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ln x \end{cases}$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$ car $\lim_{x\to 0, x>0} x\ln x = 0$.

4.2.2 Opérations algébriques sur les fonctions continues

Les opérations que nous avons pour les limites sont encore valables pour les fonctions continues :

Proposition 4.2.9 Soit I un intervalle, f et g deux fonctions définies sur I, $x_0 \in \overline{I}$. Alors

1. Si f est continue en x_0, alors $|f|$ est continue en x_0.
2. Si f et g sont continues x_0 alors $f + g$ et fg sont continues en x_0.
3. Si f et g sont continues en x_0 et si $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

Proposition 4.2.10 Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions, $x_0 \in X$ tels que f est continue en x_0 et g est continue en $y_0 = f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est continue en x_0.

Exemple 4.2.11 Les fonctions puissances sont continues en tout point $x_0 \in]0, +\infty[$ comme composée de fonctions continues.

Définition 4.2.12 On dit que f est continue sur un intervalle $I =]a, b[$ si et seulement si f est continue en tout point $x_0 \in]a, b[$.
On dit que f est continue sur un intervalle $I = [a, b]$ si et seulement si f est continue en tout point $x_0 \in]a, b[$, continue à gauche de b et à droite de a.
On dit que f est continue sur un intervalle $I =]a, b]$ si et seulement si f est continue en tout point $x_0 \in]a, b[$, continue à gauche de b.
On dit que f est continue sur un intervalle $I = [a, b[$ si et seulement si f est continue en tout point $x_0 \in]a, b[$, continue et à droite de a.
On note $C^0(I)$ ou encore $C(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Proposition 4.2.13 La somme, le produit de fonctions continues sur un intervalle I est encore continue sur I. Le quotient de fonctions continues est continues sur I privé des points où le dénominateur s'annule. Les composées de fonctions continues sont continues.

Exemple 4.2.14 Les fonctions sinus, cosinus, exponentielle, logarythme népérien, fonctions puissances, polynômes sont continues sur leurs domaines de définition.

4.2.3 Uniforme continuité

Définition 4.2.15 Soit f une fonction définie sur une partie X de $\mathbb{R}$. On dira que f est uniformément continue sur X si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0/\ \forall x, x' \in X,\ |x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Remarque : contrairement à la continuité, η ne dépend ni de x ni de x' : il est "uniforme" par rapport au point où on considère la continuité.

Exemple 4.2.16 Soit $a > 0$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-a, a] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$. Pour $x, x' \in [-a, a]$ on a

$$|f(x) - f(x')| < |x - x'| \cdot |x + x'| \leq 2a|x - x'|.$$

Ainsi, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \frac{\varepsilon}{2a}$ tel que $|x - x'| < \eta$ implique $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$: f est uniformément continue sur $[-a, a]$.

Proposition 4.2.17 Si $f : X \to \mathbb{R}$ est uniformément continue sur X, elle est continue sur X.

Proposition 4.2.18 Soit $I = [a, b]$ un intervalle, a et b deux réels distincts et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est uniformément continue sur I.

Preuve : On raisonne par l'absurde et on suppose que f n'est pas uniformément continue. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe x, x' dépendant de η tels que $|x - x'| < \eta$ et $|f(x) - f(x')| > \varepsilon$.
Pour $\eta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient x_n et x'_n tel que $|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(x'_n)| > \varepsilon$.
La suite $(x_n)_n$ est bornée car $[a, b]$ est borné, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire une suite $(x_{n_i})_i$ qui converge vers un certain $\alpha \in [a, b]$.
Comme

$$|x'_{n_i} - \alpha| \leq |x'_{n_i} - x_{n_i}| + |x_{n_i} - \alpha| < \frac{1}{n_i} + |x_{n_i} - \alpha|$$

et que $\lim_{i \to +\infty} \frac{1}{n_i} = 0$ et $\lim_{i \to +\infty} |x_{n_i} - \alpha| = 0$, on a $\lim_{i \to +\infty} |x'_{n_i} - \alpha| = 0$ et donc (x'_{n_i}) converge aussi vers α.
Maintenant f est continue en α donc $\lim_{i \to +\infty} f(x_{n_i}) = f(\alpha)$ et $\lim_{i \to +\infty} f(x'_{n_i}) = f(\alpha)$. Donc, en passant à la limite dans l'inégalité $|f(x_{n_i}) - f(x'_{n_i})| > \varepsilon$, on obtient $0 \geq \varepsilon$ et c'est absurde car $\varepsilon > 0$.
Donc f est uniformément continue sur $[a, b]$.

4.3 Propriétés d'une fonction continue sur un intervalle

Proposition 4.3.1 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est bornée sur $[a, b]$.

Preuve : On commence par montrer que f est majorée. Supposons que f ne soit pas majorée. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe x_n tel que $f(x_n) \geq n$. Comme $[a, b]$ est borné, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite extraite $(x_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un certain $c \in [a, b]$.
Comme f est continue, on a $\lim_{i \to \infty} f(x_{n_i}) = f(c)$.
D'autre part, pour tout i on a $f(x_{n_i}) \geq n_i$ et comme n_i tend vers $+\infty$ lorsque i tend vers $+\infty$, on a $\lim_{i \to \infty} f(x_{n_i}) = +\infty$.
Ainsi $f(c) = +\infty$! C'est impossible donc f est majorée sur $[a, b]$.
On démontre de même que f est minorée.

Proposition 4.3.2 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe $\alpha, \beta \in [a, b]$ tels que $f(\alpha) = \sup_{[a,b]} f$ et $f(\beta) = \inf_{[a,b]} f$

Preuve : Montrons maintenant qu'il existe $\alpha \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \sup_{[a,b]} f$.
Par définition de la borne supérieure, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $x \in [a, b]$ dépendant de ε tel que $f(x) > \sup_{[a,b]} f - \varepsilon$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, il existe $x_n \in [a, b]$ tel que $\sup_{[a,b]} f \geq f(x_n) \geq \sup_{[a,b]} f - \frac{1}{n}$.
On obtient alors une suite $(x_n)_n$ de $[a, b]$ tel que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sup_{[a,b]} f$.
Comme $[a, b]$ est fermé et borné, on peut de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ extraire une sous suite convergente $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$.
Comme $(f(x_{n_i}))_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite extraire de $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $\sup_{[a,b]} f$, elle converge elle-même vers la même limite $\sup_{[a,b]} f$.
Soit $\alpha = \lim_{i\to\infty} x_{n_i}$. Alors comme f est continue on a $\lim_{i\to\infty} f(x_{n_i}) = f(\alpha)$ d'où $f(\alpha) = \sup_{[a,b]} f$.
On démontre de même qu'il existe $\beta \in [a, b]$ tel que $f(\beta) = \inf_{[a,b]} f$.

En résumé des deux dernières propositions, on dit qu'une fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 4.3.3 (Bolzano) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) \leq 0$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Preuve : Si $f(a) = 0$ alors $c = a$ convient et si $f(b) = 0$ alors $c = b$ convient. Sinon, $f(a)f(b) < 0$: $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires. Supposons par exemple $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et on construit par récurrence une suite d'intervalles emboités

$$[a, b] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset \ldots \supset [a_n, b_n] \supset \ldots \tag{4.1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}, \tag{4.2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) < 0 \text{ et } f(b_n) > 0. \tag{4.3}$$

Lorsque $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ et $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ sont construits et vérifient (4.1), (4.2) et (4.3) on pose $m = \frac{b_n+a_n}{2}$. Trois cas peuvent se produire :
– Soit $f(m) = 0$ alors on pose $c = m$ et le théorème est prouvé.
– Soit $f(m) < 0$ on pose $a_n = c$ et $b_n = b_{n-1}$.
– Soit $f(m) > 0$ on pose $a_n = a_{n-1}$ et $b_n = c$.
Ainsi, soit à un moment on trouve $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$, soit on construit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant (4.1), (4.2) et (4.3).
Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes donc convergent vers une même limite c. On a alors d'une part :

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) = f(c)^2 \geq 0$$

et d'autre part, puisque $f(a_n) < 0$ et $f(b_n) > 0$, $f(a_n)f(b_n) < 0$ donc

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0.$$

On en déduit que $f(c)^2 = 0$ et donc $f(c) = 0$.

Corollaire 4.3.4 Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si f ne s'annule pas en un point de I alors f est ne change pas de signe sur I.

Preuve : On démontre la contraposée, à savoir si f change de signe sur I, alors f s'annule en un point de I. Puisque f change de signe sur I, il existe $\alpha, \beta \in I$ tel que $f(\alpha)f(\beta) \leq 0$. D'après le théorème de Bolzano, il existe $\gamma \in I$ tel que $f(\gamma) = 0$.

Corollaire 4.3.5 (Théorème des valeurs intermédiaires) Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et soit $s \in \mathbb{R}$ tel que $\inf_{[a,b]} f \leq s \leq \sup_{[a,b]} f$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = s$.

Preuve : Soit $\alpha, \beta \in [a, b]$ tel que $f(\alpha) = \inf_{[a,b]} f$ et $f(\beta) = \sup_{[a,b]} f$.
Si $\alpha = \beta$ alors $f(\alpha) = f(\beta) = s$ donc $c = \alpha$ convient.
Si $\alpha < \beta$ on applique alors le théorème de Bolzano à $g = f - s$ sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$: $g(\alpha)g(\beta) \leq 0$ donc il existe $c \in [\alpha, \beta] \subset [a, b]$ tel que $g(c) = 0$ c'est à dire $f(c) = s$.

Corollaire 4.3.6 Soit f une fonction continue et croissante sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$. Soit f une fonction décroissante et continue sur $[a, b]$ alors $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$.

Preuve : Supposons f croissante. Soit alors $m = inf_{[a,b]}f = f(a)$ et $M = \sup_{[a,b]} f = f(b)$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, quel que soit $\gamma \in [m, M]$ il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$. Ainsi $[f(a), f(b)] \subset f([a, b])$.
Réciproquement, quel que soit $c \in [a, b]$, $f(a) \leq f(c) \leq f(b)$ car f est croissante. Donc $f([a, b]) \subset [f(a), f(b)]$.

Corollaire 4.3.7 L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Preuve : Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Pour montrer que $f(I)$ est un intervalle, il suffit de montrer que quel que soit $\alpha, \beta \in f(I)$ tels que $\alpha < \beta$ on a $[\alpha, \beta] \subset f(I)$.
Soit $a, b \in I$ tel que $f(a) = \alpha$ et $f(b) = \beta$ et soit $\gamma \in [\alpha, \beta]$. Alors d'après le corollaire précédent, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \gamma$, c'est à dire γ appartient à $f(I)$: $[\alpha, \beta] \subset f(I)$.

4.3.1 Fonction réciproque d'une fonction continue

Nous avons vu qu'une fonction strictement monotone est bijective. Nous allons maintenant voir une réciproque : toute fonction bijective et continue sur un intervalle est strictement monotone. On démontre pour cela le lemme suivant.

Proposition 4.3.8 Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. Alors f est strictement monotone sur $[a, b]$.

Preuve : On suppose que $f(a) < f(b)$ et on montre que f est strictement croissante sur $[a, b]$. Soit donc $x, y \in [a, b]$ tel que $x < y$ et montrons que $f(x) < f(y)$. On distngue pour cela deux cas :
Premier cas : $y = b$. Soit $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} [a, b[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \phi(t) = f(b) - f(t) \end{array} \right.$. Comme f est injective, ϕ ne s'annule pas sur $[a, b[$, elle est donc de signe constant sur $[a, b[$. Or, $\phi(a) = f(b) - f(a) > 0$ donc $\phi(t) > 0$ quel que soit $t \in [a, b[$, d'où $f(x) < f(b)$.
Deuxième cas : $y \neq b$. Soit $\psi_x : \left\{ \begin{array}{ccc}]x, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \psi_x(t) = f(t) - f(x) \end{array} \right.$. ψ_x ne s'annule pas sur $]x, b]$ donc ψ_x est de signe constant sur $]x, b]$. Or d'après le premier cas $\psi_x(b) = f(b) - f(x) > 0$ donc $\psi_x(t) > 0$ quel que soit $t \in]x, b]$ d'où $f(y) > f(x)$.

Théorème 4.3.9 Soit I un intervalle et $f : I \to f(I)$ continue. Alors $f : I \to f(I)$ est strictement monotone sur I si et seulement si f est une bijection.

Preuve : Nous avons déjà vu que si f est strictement monotone alors f est bijective.
Réciproquement, supposons f bijective et continue. Soit alors $a, b \in I$, $a < b$. Supposons que $f(a) < f(b)$ et montrons que f est strictement croissante sur I.
D'après la proposition précédente, f est strictement monotone sur $[a, b]$ et comme $f(a) < f(b)$, f est strictement croissante sur $[a, b]$.
Soit $x, y \in I$, $x < y$. On doit montrer que $f(x) < f(y)$.
Soit $\alpha = \min(a, x)$ et $\beta = \max(b, y)$. D'après la proposition précédente, f est strictement monotone sur $[\alpha, \beta]$. Or $\alpha \leq a < b \leq \beta$ donc $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$ et f est strictement croissante sur $[a, b]$. Par conséquent f est strictement croissante sur $[\alpha, \beta]$. Comme x et y appartiennent à $[\alpha, \beta]$ et comme $x < y$ on a $f(x) < f(y)$.

Question : on a vu que si f est bijective, f est inversible au sens des fonctions. Si de plus f est continue, f^{-1} est-elle aussi continue ?

Théorème 4.3.10 Soit I un intervalle et $f : I \to f(I)$ une fonction continue et bijective. Alors sa fonction réciproque f^{-1} est continue.

Preuve : D'après le théorème précédent f est strictement monotone, par exemple strictement croissante. Alors comme nous l'avons vu au chapitre précédent, f^{-1} est aussi strictement croissante.
Soit $\alpha \in f(I)$ et $a \in I$ tel que $f(a) = \alpha$. Nous avons alors $f^{-1}(\alpha) = a$. Comme f^{-1} est croissante, f^{-1} admet une limite (finie ou infini) lorsque y tend vers α par valeurs inférieures. On a alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f^{-1} \circ f(x) = \lim_{\substack{y \to \alpha \\ y < \alpha}} f^{-1}(y)$$

et d'autre part

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f^{-1} \circ f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} x = a$$

d'où $\lim_{\substack{y \to \alpha \\ y < \alpha}} f^{-1}(y) = a$. De même $\lim_{\substack{y \to \alpha \\ y > \alpha}} f^{-1}(y)$ existe car f^{-1} est croissante et on a même $\lim_{\substack{y \to \alpha \\ y > \alpha}} f^{-1}(y) = a$. Ainsi f^{-1} est continue en α.

Exemple 4.3.11 La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.

Proposition 4.3.12 Soit $I =]a, b[$ et $J =]\alpha, \beta[$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, a, b, α et β éventuellement infinis. Soit $f : I \to J$ une fonction continue et bijective. Alors si f est croissante, sa fonction réciproque f^{-1} satisfait $\lim_{t \to \alpha} f^{-1}(t) = a$ et $\lim_{t \to \beta} f^{-1}(t) = b$.
Si f est décroissante, $\lim_{t \to \alpha} f^{-1}(t) = b$ et $\lim_{t \to \beta} f^{-1}(t) = b$.

Preuve : On prouve que $\lim_{t \to \beta} f^{-1}(t) = b$ dans le cas où f est croissante. Comme f croissante, f^{-1} est elle aussi croissante et $\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = \beta$. f^{-1} admet une limite (finie ou $+\infty$) et on a d'une part

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f^{-1} \circ f(x) = \lim_{\substack{t \to \beta \\ t < \beta}} f^{-1}(t) \text{ car } \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = \beta$$

et d'autre part

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f^{-1} \circ f(x) = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} x = b$$

d'où $\lim_{\substack{t \to \beta \\ t < \beta}} f^{-1}(t) = b$.

Exemple 4.3.13 Les fonctions arcsinus, arccosinus et arctangente sont donc continues. La fonction racine est continue en tant qu'inverse de $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$.

Proposition 4.3.14
1. $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
2. $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.
3. $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$
4. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
5. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Preuve : Les deux premières limites sont une conséquence de la proposition précédente et du fait que $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et que $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{X}{\ln X} = +\infty.$$

$$\lim_{x \to \infty} x e^x = \lim_{X \to +\infty} X \ln X = 0.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{X \to 1} \frac{X - 1}{\ln X} = \lim_{t \to 0} \frac{t}{\ln(t + 1)} = 1.$$