Chapitre 3

Fonctions Réelles : Généralités

Définition 3.0.4 Nous dirons que f est une fonction réelle si f est une application définie sur un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ et à valeur dans un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$. D est appelé ensemble de départ de f et A est l'ensemble d'arrivée.
La fonction f associe à un élément $x \in D$ un unique élément de A noté $f(x)$ et appelé image de x par f. x est alors un antécédent de $f(x)$ par f.
On notera

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right. .$$

Attention, $f(x)$ peut avoir deux antécédents distincts.

Exemple 3.0.5 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array} \right.$. Alors f est une fonction réelle, 2 a pour image 4 car $f(2) = 2^2 = 4$ et 4 a pour antécédents 2 et -2 car $f(2) = f(-2) = 4$.
Soit encore $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array} \right.$. g est une deux fonction réelle distinctes de f car f et g n'ont pas le même domaine d'arrivée. Comme nous le verrons après, elles ont des propriétés différentes mêmes si l'expression, "x^2" qui les définissent sont les mêmes.
Deux fonctions sont donc égales si elles ont le même ensemble de départ, le même ensemble d'arrivée et sont définies par la même expression. Ceci nous amène à la notion de domaine de définition.

On ramène le plan à un repère orthonormé direct. Le cercle de centre 0 de rayon 1 a pour périmètre 2π. A $\theta \in \mathbb{R}$, on associe le point M obtenu en parcourant une distance θ le long du cercle en partant du point $(1, 0)$. Si $\theta > 0$ on parcourra le cercle dans le sens direct, c'est à dire en partant d'abord dans le cadrant des points d'ordonnée positive et dans le sens indirect (ordonnée négative) si $\theta < 0$.
On appelle
– sinus de θ et on note $\sin\theta$ l'ordonnée de ce point M.
– cosinus de θ et on note $\cos\theta$ l'abscisse de ce point M.
Les fonctions sinus et cosinus sont :

$$\sin : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \sin(\theta) \end{array} \right. \qquad \cos : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \cos(\theta) \end{array} \right. .$$

Valeurs Particulières

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Représentation graphique

Définition 3.0.6 Soit $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. On définit

– la somme de f et g

$$f + g : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array} \right. .$$

– le produit de f et g

$$f \cdot g : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \end{array} \right. .$$

– le produit de f par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda f : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \mathbb{R} & \longmapsto & x \end{array} \right. \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x).$$

– l'inverse de f si $f(x) \neq 0$ quel que soit $x \in X$

$$\frac{1}{f} : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} \end{array} \right. .$$

Exemple 3.0.7 On définit aussi l'application tangente

$$\tan : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{\frac{k}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \theta & \longmapsto & \tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \end{array} \right. .$$

Tangente est bien définie car $\cos\theta = 0$ si et seulement si $\theta = k\frac{\pi}{2}$.

Représentation graphique :

Définition 3.0.8 Nous appellerons domaine de définition d'une expression le plus grand sous ensemble X de $\mathbb{R}$ sur lequel est l'expression est définie, c'est à dire calculable en tout point de X.

Exemple 3.0.9 Le domaine de définition de l'expression $1/x$ est $\mathbb{R}^*$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ on peut calculer $1/x$ mais on ne peut pas calculer $1/0$.

Définition 3.0.10 Soit $f : X \to Y$ une fonction réelle. On appelle
- image directe d'un sous-ensemble A de X par f et on note $f(A)$ le sous ensemble de Y

$$f(A) = \{f(x),\ x \in A\}.$$

- image réciproque d'un sous-ensemble B de Y par f et on note $f^{-1}(B)$ le sous ensemble de X

$$f^{-1}(B) = \{x \in X,\ f(x) \in B\}.$$

- graphe de f l'ensemble $\{(x, f(x)),\ x \in A\}$.
- représentation graphique de f l'ensemble des points du plan rapporter à un repère orthonormé direct de coordonnées $(x, f(x))$, $x \in X$.

Exemple 3.0.11 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array} \right.$. Alors $f([2, +\infty[) = [4, +\infty[$ et $f^{-1}(]-2, 5[) = [0, \sqrt{5}[$.

Définition 3.0.12 Soit $f : X \to \mathbb{R}$. On dira que
- f est majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in X,\ f(x) \leq M$.
- f est minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in X,\ f(x) \geq m$.
- f est bornée si f est à la fois majorée et minorée.

Exemple 3.0.13 Sinus et cosinus sont majorée par 1 et minorée par -1 donc bornée.
L'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array} \right.$ n'est pas majorée car pour tout $M \in \mathbb{R}^*$, il existe x tel que $0 < x < \frac{1}{M}$ et donc $f(x) > M$.

Remarque : Si f est majorée alors $f(X)$ est majorée et admet donc une borne supérieure que l'on note $\sup_X f = \sup f(X) = \sup\{f(x),\ x \in X\}$. De même si f est minoré $\inf_X f = \inf f(X) = \inf\{f(x),\ x \in X\}$.

Définition 3.0.14 Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dit que
- f est croissante sur I si pour tout $x, x' \in I$, $x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$.
- f est strictement croissante sur I si pour tout $x, x' \in I$, $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$.
- f est décroissante sur I si pour tout $x, x' \in I$, $x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$.
- f est strictement décroissante sur I si pour tout $x, x' \in I$, $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$.
- f est (strictement) monotone sur I si f est (strictement) croissante sur I ou (strictement) décroissante sur I.

Exemple 3.0.15 – La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ est croissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
- La fonction sinus est croissante sur $[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi]$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$ et elle est décroissante sur $[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi]$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$.
- La fonction cosinus est décroissante sur $[0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$ et elle est croissante sur $[\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$.
- La fonction tangente est croissante sur $]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$

Définition 3.0.16 Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. On dira que f est périodique s'il existe un réel $T \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que pour tout $x \in I$, $x + T$ appartient encore à X et $f(x + T) = f(x)$. On appellera période le plus petit réel positif T vérifiant ces conditions.

Exemple 3.0.17 Les fonctions sinus et cosinus sont périodique de période 2π, la fonction est périodique de π. La fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - E(x) \end{array} \right.$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x est de période 1.

Définition 3.0.18 Soit $a > 0$ et $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$. On dit que f est
- f est une fonction paire si pour tout $x \in [-a, a]$ $f(x) = f(-x)$.
- f est une fonction impaire si pour tout $x \in [-a, a]$ $-f(x) = f(-x)$.

Exemple 3.0.19 cosinus est une fonction paire et sinus et impaire.

Remarque : Si f est une fonction impaire, la courbe représentative de f est symétrique par rapport à l'origine O.
Si f est une fonction paire, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Définition 3.0.20 (Injection, surjection, bijection) $f : X \to Y$ est dite
- *injective* si $\forall x, x' \in X$, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$.
- *surjective* si $\forall y \in Y$, $\exists x \in X$ tel que $f(x) = y$.
- *bijective* si f est à la fois injective et surjective. On dira alors que f est une bijection de X sur Y.

Exemple 3.0.21 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array} \right.$. f n'est pas injective car $f(-1) = f(1)$ alors que $1 \neq -1$, f n'est pas surjective car il n'existe pas $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = -1$.
Soit $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & g(x) = x^2 \end{array} \right.$. Alors g n'est pas injective mais est surjective car $\forall y \in \mathbb{R}^+$, $\exists x = \sqrt{y}$ tel que $f(x) = y$.
Cela justifie en particulier que f et g ne sont pas la même fonction.

Remarque : Une fonction périodique n'est jamais injective.

Proposition 3.0.22 Soit I un intervalle et $f : I \to f(I)$ une fonction strictement monotone. Alors f est bijective.

Preuve : On suppose f strictement croissante. Alors $x \neq x' \Rightarrow x > x'$ ou $x < x' \Rightarrow f(x) > f(x')$ ou $f(x) < f(x') \Rightarrow f(x) \neq f(x')$. De plus $f : I \to f(I)$ est surjective.
Remarque : La réciproque est fausse en générale.

Définition 3.0.23 Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux fonctions réelles. On appelle <u>*composée de g et f*</u> et on note $g \circ f$ l'application

$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccl} X & \longrightarrow & Z \\ x & \longmapsto & g \circ f(x) := g\left(f(x)\right) \end{array} \right. .$$

Exemple 3.0.24 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = 3x + 2 \end{array} \right.$
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g \circ f(x) = g(f(x)) = 3f(x) + 2 = 3x^2 + 2$ mais aussi $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 3x^2 + 2$.

Proposition 3.0.25 Soient les applications $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} A$.
Alors $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Définition 3.0.26 Soit $f : X \to Y$ une bijection. On appelle <u>*bijection réciproque*</u> de f l'application $f^{-1} : \left\{ \begin{array}{ccl} Y & \longrightarrow & X \\ y & \longmapsto & x \text{ l'unique solution de l'équation } f(x) = y \end{array} \right. .$

Exemple 3.0.27 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccl} [0, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$. f est strictement croissante et $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$ donc f est une bijection $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ et sa bijection réciproque est

$$\sqrt{\ } : \left\{ \begin{array}{ccl} [0, +\infty[& \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array} \right. .$$

Remarque : Attention à ne pas confondre f^{-1} l'inverse au sens des applications et $\frac{1}{f}$ l'inverse au sens des nombres réels car $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$.

Proposition 3.0.28 Soit $f : X \to f(X)$ une bijection. La courbe représentative de f^{-1} est la symétrique par rapport à la droite $y = x$ de la courbe représentative de f.

Proposition 3.0.29 Soit $f : I \to f(I)$ une fonction strictement croissante (resp. décroissante). Alors f^{-1} est strictement croissante (resp. décroissante).

Preuve : Supposons f croissante. Soit alors $y, y' \in f(I)$, $y < y'$. Montrons que $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$.
Raisonnons par l'absurde et supposons que $x = f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y') = x'$. Alors comme f est croissante, $f(x) \geq f(x')$ or $f(x) = y$ et $f(x') = y'$ ce qui donne $y \geq y'$: c'est absurde ! Donc $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$.

Définition 3.0.30 – L'application sinus est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Sinus vue comme fonction réelle définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et à valeur dans $[-1, 1]$ est une bijection. On appelle arcsinus et on note $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ la bijection réciproque. Arcsinus est donc strictement croissante sur son domaine de définition. On a la représentation graphique suivante :

– L'application cosinus est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Cosinus vue comme fonction réelle définie sur $[0,\pi]$ et à valeur dans $[-1,1]$ est une bijection. On appelle arccosinus et on note arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$ la bijection réciproque. arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$ et on a la représentation graphique suivante :

– L'application tangente est strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Tangente vue comme fonction réelle définie sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ et à valeur dans $\mathbb{R}$ est une bijection. On appelle arctangente et on note arctan : $\mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ la bijection réciproque. arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et on a la représentation graphique suivante :

3.1 Logarythme népérien, exponentielle et fonctions puissances

Définition 3.1.1 On définit la fonction logarythme népérien et note ln la fonction

$$\ln : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln t \end{array} \right.$$

où
– Si $t \geq 1$, $\ln t$ désigne l'aire délimité par les trois droites d'équation $x=1$, $x=t$, $y=0$ et la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
– Si $t \leq 1$, $\ln t$ désigne l'opposé de l'aire délimité par les trois droites d'équation $x=1$, $x=t$, $y=0$ et la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

On admet pour le moment les deux propositions suivantes qui seront demontrées dans les chapitres suivants.

Proposition 3.1.2 Pour tout $a,b>0$, $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

Corollaire 3.1.3 Pour tout $x>0$ on $\ln\frac{1}{x}=-\ln x$.

Preuve : $0=\ln 1=\ln\left(x\frac{1}{x}\right)=\ln x+\ln\frac{1}{x}$.

Proposition 3.1.4

$$\ln(]0,+\infty[)=\mathbb{R}$$

Représentation graphique :

La fonction ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. C'est donc une bijection de $]0, +\infty[$ sut $\mathbb{R}$. Par conséquent, il existe $e \in]0, +\infty[$ tel que $\ln(e) = 1$.
Comme ln est une bijection, elle admet une fonction réciproque.

Définition 3.1.5 On note exp et on appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de ln :

$$\exp : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, +\infty[\\ x & \longmapsto & exp(x) = e^x, \text{ tel que } \ln(e^x) = x \end{array} \right. .$$

Proposition 3.1.6 Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.

Preuve : Soit $a, b \in \mathbb{R}$. On a $\ln(e^a \cdot e^b) = \ln(e^a) + \ln(e^b) = a + b$ donc $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$. *Représentation graphique :*

Lorsque n est entier positif, on définit x^n, $x \in \mathbb{R}$, en posant $x^n = x \times x \times \ldots \times x$ n fois. Si n est entier négatif, pour $x \in \mathbb{R}^*$, $x^n = \frac{1}{x^{-n}}$. Les fonctions puissances généralisent ces définitions dans le cas où n est un réel :

Définition 3.1.7 (Fonctions Puissances) Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit la fonction puissance f_a

$$f_a : \left\{ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & x^a = e^{a \ln x} \end{array} \right. .$$

Remarque : Cette définition prolonge bien celle de x^n lorsque n est entier car

$$f_n(x) = e^{n \ln x} = e^{\ln x} \cdot e^{\ln x} \ldots e^{\ln x} = x \cdot x \ldots x = x^n.$$

Proposition 3.1.8 Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^*$, on a $f_a \circ f_b = f_{ab}$, c'est à dire $(x^a)^b = x^{a \cdot b}$, $\forall x > 0$.

Preuve : Soit $x > 0$. On a $f_a \circ f_b(x) = e^{a \ln(e^{b \ln x})} = e^{ab \ln x} = f_{ab}(x)$.
On a donc par exemple $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$...

Proposition 3.1.9 Pour tout $a, b \in \mathbb{R}^*$, on a $f_{a+b} = f_a f_b$, c'est à dire $x^{a+b} = x^a x^b$, $\forall x > 0$.

Preuve : Soit $x > 0$. On a

$$x^{a+b} = e^{(a+b) \ln x} = e^{a \ln x + b \ln x} = e^{a \ln x} \cdot e^{b \ln x} = x^a \cdot x^b.$$

Proposition 3.1.10 $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\forall x, y > 0$ on a $x^a y^a = (xy)^a$.

Preuve : Soit $x, y > 0$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$(xy)^a = e^{a \ln(xy)} = e^{a(\ln x + \ln y)} = e^{a \ln x + a \ln y} = e^{a \ln x} \cdot e^{a \ln y} = x^a \cdot y^a.$$

Proposition 3.1.11 Pour tout $a > 0$, f_a est strictement croissante, bijective et sa fonction réciproque est $f_{\frac{1}{a}}$.
Pour tout $a < 0$, f_a est strictement décroissante, bijective et sa fonction réciproque est $f_{\frac{1}{a}}$.

Preuve : Soit $a > 0$. Pour $x < x'$, comme ln est strictement croissante et $a > 0$ on a $a \ln x < a \ln x'$. Comme exp est strictement croissante, $e^{a \ln x} < e^{a \ln x'}$. Ainsi f_a est strictement croissante et bijective. De plus, pour tout $x > 0$ d'après la proposition précédente on a $f_{\frac{1}{a}} \circ f_a(x) = f_1(x) = x$ donc $f_{\frac{1}{a}}$ est l'inverse de f_a.
On démontre de même le cas $a < 0$.
Représentation graphique :