Chapitre 2

Les Suites Numériques

2.1 Introduction

Les suites numériques représentent une notion qui apparaît naturellement dans la vie courante. Part exemple, vous disposez d'un capital C que vous décidez de placez sur un livret d'épargne logement en vue d'une future acquisition. Le livret est rémunéré à 3,12%. Notons c_n le capital que vous avez au bout de n années. Donc $c_0 = C$. Au bout d'un an, vous disposez alors de $c_1 = 1,0312 \cdot c_0$, la seconde année, vous aurez $c_2 = 1,0312 \cdot c_1 = 1,0312^2 c_0$ et de manière plus général, au bout de n années, vous avez $c_n = c_{n-1} \cdot 1,0321 = c_0 \cdot 1,0312^n$.
Intuitivement, une suite numérique est la donnée pour tout n entier d'un réel. Il est souvent intéressant de connaître le comportement d'une suite : pour tout $n \in \mathbb{N}$ a-t-on $c_n > c_{n-1}$? Autrement dit la suite, votre capital, est-il croissant ? Est-il décroissant ? Que se passe-t-il lorsque n devient très grand : votre capital va-t-il augmenter indéfiniment (=tendre vers l'infini) ? Stagner à une valeur limite ?...

2.2 Suites

2.2.1 Premières définitions

Définition 2.2.1 On appelle suite de $\mathbb{R}$ toute application de

$$c : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & c(n) \end{array} \right.$$

On notera $c_n = c(n)$ la valeur de c en n et on confondra généralement l'application c et l'ensemble de ses valeurs noté $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$. c_n s'appelle le terme de rang n de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 2.2.2 – $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de manière récursive : On se donne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $c_0 \in \mathbb{R}$. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit c_n en posant $c_n = f(c_{n-1})$.
– $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie de manière fonctionnelle, c'est à dire exprimée directement comme fonction de n : $\forall n \in \mathbb{N}$, $c_n = 1,0321^n \cdot C$.
– On donne "explicitement" c_n : $c_n = n^{\text{ième}}$ décimal de π.

Définition 2.2.3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Nous dirons que
– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante(resp. décroissante) à partir du rang N si pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$).
– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante(resp. décroissante) à partir du rang N si pour tout $n \geq N$, $u_{n+1} > u_n$ (resp. $u_{n+1} < u_n$).
– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite monotone (resp strictement monotone) à partir du rang N si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (resp. strictement décroissante) à partir du rang N ou si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (resp. strictement croissante) à partir du rang N.

Exemple 2.2.4 Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. (u_n) est décroissante.
Soit (v_n) définie par $v_n = 1 + \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. (v_n) est croissante.

Définition 2.2.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Nous dirons que
– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée s'il existe M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq M$.
– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée s'il existe m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $m \leq u_n$.
– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si elle est à la fois minorée et majorée.

Exemple 2.2.6 Soit (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$. (u_n) est majorée par 1 et minorée par 0.
Soit (v_n) définie par $v_n = 1 + \frac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. (v_n) est minorée par 0 et non majorée.

2.2.2 convergence

Définition 2.2.7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dira que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l ou a pour limite l ou encore converge vers l si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}/(n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon).$$

On écrira alors $\lim_{n\to\infty} u_n = l$.

On dira que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ si

$$\forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}/(n \geq N \Rightarrow u_n > M).$$

On écrira alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

On dira que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ si

$$\forall M < 0, \exists N \in \mathbb{N}/(n \geq N \Rightarrow u_n < M).$$

On écrira alors $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 2.2.8 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$. Alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
En effet : soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédéen, il existe N tel que $1 < N \cdot \varepsilon$. Pour $n \geq N$, on a alors $n \cdot \varepsilon \geq N \cdot \varepsilon > 1$ Ainsi $\frac{1}{n} < \varepsilon$. De plus, comme $n > 0$, $\frac{1}{n} > 0 > -\varepsilon$ et donc $|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon$.

2.2.3 Exemples de suites

Les suites arithmétiques

Définition 2.2.9 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera dite arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} - u_n = r$.
r est appelé raison et u_0 le terme initiale de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 2.2.10 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = nr + u_0$.
2. si $r > 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
3. si $r < 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et $\lim_{n\to\infty} u_n = -\infty$.
4. si $r = 0$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Proposition 2.2.11 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)u_0 + r\frac{n(n+1)}{2}.$$

Suites géométriques

Définition 2.2.12 $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera dite suite géométrique s'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_{n+1} = ru_n$.
r est appelé raison et u_0 le terme initiale de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition 2.2.13 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison r et de premier terme $u_0 > 0$. Alors

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 r^n$.
2. si $r > 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante et $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
3. si $r = 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
4. si $0 < r < 1$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
5. si $-1 < r < 0$ alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.
6. si $r \leq -1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Proposition 2.2.14 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $r \neq 1$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Preuve : Par récurrence.

2.3 Propriétés des limites

Proposition 2.3.1 (Unicité) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, cette dernière est unique.

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ait deux limites distinctes $l_1 \neq l_2$.
Soit alors $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{3}$. Comme $l_1 \neq l_2$, ε est strictement positif.
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l_1, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait $|u_n - l_1| < \varepsilon$.
De même, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l_2, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on ait $|u_n - l_2| < \varepsilon$.
Pour $N = \max(N_1, N_2)$ on a

$$\begin{aligned} |l_1 - l_2| &= |l_1 - u_N + u_N - l_2| \\ &\leq |l_1 - u_N| + |u_N - l_2| \text{ d'après l'inégalité triangulaire} \\ &< \varepsilon + \varepsilon = \frac{2}{3}|l_1 - l_2|. \end{aligned}$$

Et cela est impossible : un nombre strictement positif ne peut-être strictement inférieur à 2/3 de lui-même.

Proposition 2.3.2 Toute suite convergente est bornée.

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, l sa limite. On applique la définition de la limite avec $\varepsilon = 1$:Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - l| < 1$. Ainsi pour tout $n \geq N$ on a $l - 1 < u_n < l + 1$. Soit alors $M = \max(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, l + 1)$ et $m = \min(u_0, u_1, \ldots, u_{N-1}, l - 1)$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $m \leq u_n \leq M$.

Proposition 2.3.3 (Opération sur les limites) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites et a un réel.

1. $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = l'$ implique $\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = l + l'$.
2. $\lim_{n\to\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = l'$ implique $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = ll'$.
3. $\lim_{n\to\infty} u_n = l \neq 0$ et $\lim_{n\to\infty} v_n = l'$ implique $\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \frac{l'}{l}$.

avec les conventions $+\infty + (+\infty) = +\infty$, $\infty \times \infty = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$, $\frac{\infty}{0} = \infty$.

Remarque : Dans les calculs de limites, Les formes $0/0$, ∞/∞, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 0^∞, ∞^0... sont appelées formes indéterminées. La proposition ci-dessus ne permet alors pas de conclure...
Preuve : Pour 1. Soit $\varepsilon > 0$ donné.
Comme $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Comme $\lim_{n\to\infty} v_n = l'$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on ait $|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour tout $n \geq N$ on a

$$\begin{array}{rcl} |u_n + v_n - l - l'| & \leq & |u_n - l| + |v_n - l'| \\ & < & \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{array}$$

donc $\lim_{n\to\infty} u_n + v_n = l + l'$.
Pour 2. Soit $\varepsilon > 0$ donné.
Comme $\lim_{n\to\infty} u_n = l$, si $l' \neq 0$ il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2|l'|}$.
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donc $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est borné. Soit M la borne de $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.
Comme $\lim_{n\to\infty} v_n = l'$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on ait $|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2M}$.
Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour tout $n \geq N$ on a

$$\begin{array}{rcl} |u_n v_n - ll'| & = & |u_n v_n - u_n l' + u_n l' - ll'| \\ & = & |u_n(v_n - l') + (u_n - l)l'| \\ & \leq & |u_n||v_n - l'| + |u_n - l| \cdot |l'|. \end{array}$$

Si $l' = 0$ alors

$$|u_n v_n - ll'| \leq |u_n||v_n - l'| < M\frac{\varepsilon}{2M} < \varepsilon$$

et si $l' \neq 0$ alors

$$|u_n v_n - ll'| \leq |u_n||v_n - l'| + |u_n - l||l'| < M\frac{\varepsilon}{2M} + |l'|\frac{\varepsilon}{2|l'|} = \varepsilon$$

donc $\lim_{n\to\infty} u_n v_n = ll'$.
Pour 3. Il suffit de montrer que si $\lim_{n\to\infty} u_n = l \neq 0$ alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{l}$ et d'appliquer le deuxième point à $v_n \cdot \frac{1}{u_n}$.
Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| < \varepsilon$. Or $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| = \frac{|u_n - l|}{|u_n|\cdot|l|}$. Il suffit de montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - l| < \varepsilon|u_n||l|$.
On commence par montrer que $|u_n| > \frac{l}{2}$ si n est suffisamment grand.
Comme $\lim_{n\to\infty} u_n = l \neq 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait $|u_n - l| < \frac{|l|}{2}$. Comme $||u_n| - |l|| \leq |u_n - l|$, on en déduit que $-\frac{|l|}{2} < |u_n| - |l|$ et donc que $\frac{1}{2}|l| < |u_n|$. Ainsi, si on peut montrer que $|u_n - l| < \frac{1}{2}\varepsilon|l|^2$, on aura $|u_n - l| < \varepsilon|u_n||l|$.
Soit alors $\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon|l|^2$. Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - l| < \varepsilon'$.
Alors pour $n \geq N = \max(N_1, N_2)$ on a

$$|u_n - l| < \varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon|l||l| \leq \varepsilon|l||u_n|$$

et donc $\forall n \geq N$, $|\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l}| < \varepsilon$.

Théorème 2.3.4 Soit (u_n) une suite qui converge vers l et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Supposons que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il exsite $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$, tel que $u_n \geq \lambda$. Alors $l \geq \lambda$.

Preuve : On raisonne par l'absurde et on suppose que $l < \lambda$. Soit $\varepsilon = \frac{\lambda - l}{2}$. Par hypothèse, $\varepsilon > 0$ et comme (u_n) converge vers l, il exsite N tel que pour tout $n \geq N$ on ait

$$|u_n - l| < \varepsilon.$$

Par hypothèse sur (u_n), il existe $n \geq N$ tel que $u_n \geq \lambda$ et donc $u_n - l \geq \lambda - l$. On obtient ainsi la suite d'inégalité suivante :

$$0 < \lambda - l \leq u_n - l \leq |u_n - l| < \varepsilon = \frac{\lambda - l}{2}$$

et c'est absurde car on ne peut pas avoir $0 < \lambda - l < \frac{\lambda - l}{2}$! Donc $l \geq \lambda$.

Exemple 2.3.5 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{e^n - n^3 + 3}{e^n - n^2 + 4}$. Alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$ et donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n > \frac{1}{2}$. En effet, si un tel N n'existe pas, pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leq \frac{1}{2}$ et donc on aurait $1 \leq \frac{1}{2}$, ce qui serait absurde.

Théorème 2.3.6 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites qui converge respectivement vers l et l'. Supposons qu'à partir d'un certain rang N on ait $u_n \geq v_n$. Alors $l \geq l'$.

Preuve : On applique le théorème précédent à la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $w_n = u_n - v_n$. $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $l - l'$ et $w_n \geq 0$ à partir d'un certain rang N. On en déduit que $l - l' \geq 0$.

Remarque : Même si dans les théorèmes précédents les inégalités sur les termes des suites sont strictes, les inégalités sur les limites sont larges : $u_n = \frac{1}{n}$, alors $u_n > 0$ mais on a pas $\lim_{n \to \infty} u_n > 0$ car $\lim_{n \to \infty} u_n = 0$.

Théorème 2.3.7 (des gendarmes) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites telles que
– Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $u_n \leq v_n \leq w_n$,
– $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une même limite l.
Alors $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim_{n \to \infty} u_n = l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_1$ on ait $|u_n - l| < \varepsilon$.
Comme $\lim_{n \to \infty} w_n = l$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_2$ on ait $|w_n - l| < \varepsilon$.
Soit $N = \max(N_1, N_2)$. Alors pour tout $n \geq N$ on a

$$-\varepsilon < u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l < \varepsilon$$

et donc $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l.

Exemple 2.3.8 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites définies par $u_n = \frac{1}{n+1}$ et $v_n = \frac{1}{n+1+a_n}$ où a_n est la $n^{\text{ième}}$ décimale de π. Alors $0 < v_n \leq u_n$ et donc $\lim_{n \to \infty} v_n = 0$.

2.4 Existence de la limite

2.4.1 Suites extraites

Définition 2.4.1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On appelle suite extraite ou sous-suite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ toute suite $(u_{n_i})_{i \in \mathbb{N}}$ où $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entier.

L'idée est de regarder la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de ne prendre que certains de ces termes et toujours en avançant strictement. Par exemple, si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_n = n^2$, on peut décider de ne prendre que le indice n pair. On pose $n_i = 2i$: $u_{n_i} = u_{2i}$.

Remarque 2.4.2 Comme la suite $(n_i)_i$ est strictement croissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a $n_i \geq i$, pour tout i.

Exemple 2.4.3 La suite $(e^{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(e^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème 2.4.4 Toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même limite.

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$. il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - l| < \varepsilon$. Donc pour tout $i \geq N$, comme $n_i \geq i$ on a $n_i \geq N$ et donc $|u_{n_i} - l| < \varepsilon$.

Exemple 2.4.5 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas. En effet, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait vers l, alors $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ vers l aussi. Or $u_{2n} = 1$ donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1 et $u_{2n+1} = -1$ donc $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers -1. Comme $1 \neq -1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger.

Proposition 2.4.6 Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une suite extraite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait

$$|u_{n_k} - l| \geq \varepsilon_0.$$

Preuve : Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers l, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq N$ tel que $|u_n - l| \geq \varepsilon_0$.
On construit la suite extraite par récurrence.
Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_{n_0} - l| \geq \varepsilon_0$.
Si $n_0, n_1, \ldots, n_k$, $k \geq 0$, sont construits tels que pour tout $i \leq k$ on a $|u_{n_i} - l| \geq \varepsilon_0$. Alors il existe $n_{k+1} \geq n_k$ tel que $|u_{n_{k+1}} - l| \geq \varepsilon_0$.

2.4.2 Suite majorée et croissante

Théorème 2.4.7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée par M. Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ qui satisfait $l \leq M$.

Preuve : Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$. On pose $U = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Alors U est une partie majorée de $\mathbb{R}$ par M, U admet une borne supérieure l. On montre que $l = \lim_{n\to\infty} u_n$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe un élément de U, par exemple u_N tel que $l - \varepsilon < u_N$.
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, pour tout $n \geq N$ on a $l - \varepsilon < u_N \leq l$.
Ainsi, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ on a $l - \varepsilon < u_n \leq l < l + \varepsilon$ c'est à dire $|u_n - l| < \varepsilon$.

2.4.3 Suites adjacentes

Définition 2.4.8 Les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seront dites adjacentes si :

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,
2. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
3. $\lim_{n\to\infty} v_n - u_n = 0$.

Proposition 2.4.9 Soient deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adjacentes. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq v_n$.

Preuve : Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > v_{n_0}$.
Alors comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a pour tout $n \geq n_0$:

$$u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{n_0}$$

et donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n - v_n \geq u_{n_0} - v_{n_0} > 0$$

et c'est impossible. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \leq v_n$.

Théorème 2.4.10 Deux suites adjacentes de $\mathbb{R}$ converge vers une même limite.

Preuve : Soient deux suites adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$ car $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un certain l.
De même, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et minorée donc converge vers un certain l'. On a $\lim_{n\to\infty} v_n - u_n = l' - l$ et par hypothèse, $\lim_{n\to\infty} v_n - u_n = 0$ donc $l = l'$.

Théorème 2.4.11 (Bolzano-Weierstrass) De toute suite bornée on peut extraire une sous suite convergente.

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minorée par m et majorée par M. On va construire par récurrence deux suites adjacentes $(m_i)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et une suite $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $m_i \leq u_{n_i} \leq M_i$.
Si nous y parvenons, $(m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(M_i)_{i\in\mathbb{N}}$ convergerons vers un certain l et le théorème des gendarmes impliquera que $(u_{n_i})_{i\in\mathbb{N})}$ converge aussi vers l.
On pose $m_0 = m$, $M_0 = M$ et $n_0 = 0$.
Soit $l_0 = \frac{M_0+m_0}{2}$. Alors soit $[m_0, l_0]$, soit $[l_0, M_0]$ contient une infinité de terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Par exemple $[l_0, M_0]$ contient une infinité de termes. On pose alors $M_1 = M_0$ et $m_1 = l_0$.
Supposons avoir construit une suite d'intervalles emboités

$$[m_i, M_i] \subset [m_{i-1}, M_{i-1}] \subset \ldots \subset [m_1, M_1] \subset [m_0, M_0]$$

tels que chaque intervalle contienne une infinité de terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pose alors $l_i = \frac{M_i+m_i}{2}$.
Alors l'intervalle soit $[m_i, l_i]$, soit $[l_i, M_i]$ contient une infinité de terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Par exemple $[l_i, M_i]$ contient une infinité de termes. On pose alors $M_{i+1} = M_i$ et $m_{i+1} = l_i$.
On construit ainsi par récurrence une famille d'intervalles emboités tels que chacun de ses intervalles contient une infinité de termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
La suite $(m_i)_{i\in\mathbb{N})}$ est bien croissante et la suite $(M_i)_{i\in\mathbb{N})}$ est décroissante. De plus pour tout i on a

$$M_{i+1} - m_{i+1} = M_i - \frac{M_i + m_i}{2} = \frac{M_i - m_i}{2}$$

Donc $(M_i - m_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison $1/2$, elle converge vers 0 et $(m_i)_{i\in\mathbb{N})}$ et $(M_i)_{i\in\mathbb{N})}$ sont adjancentes.
Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on choisit ensuite un terme u_{n_i} dans $[m_i, M_i]$ de sorte que $n_i > n_{i-1}$.
On a ainsi construit deux suites adjacentes $(m_i)_{i\in\mathbb{N})}$ et $(M_i)_{i\in\mathbb{N})}$ et nous avons extrait une sous suite $(u_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ telles que $m_i \leq u_{n_i} \leq M_i$.

2.4.4 Suites de Cauchy

Définition 2.4.12 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera dite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$ on ait $|u_n - u_m| < \varepsilon$.

Théorème 2.4.13 Toute suite convergente est de Cauchy.

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers l. Soit ensuite $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$ on ait $|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$.
On a alors pour $n, m \geq N$:

$$|u_n - u_m| \leq |u_n - l| + |u_m - l| < \varepsilon.$$

Proposition 2.4.14 Toute suite de Cauchy est bornée.

Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. On applique la définition d'une suite de Cauchy avec $\varepsilon = 1$.
Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n, m \geq N$ on ait $|u_n - u_m| < 1$.
On remplace m par N et on obtient pour $n \geq N$ $|u_n - u_N| < 1$. Ainsi $|u_n| < 1 + |u_N|$ pour tout $n \geq N$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $\max(|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, |u_N| + 1)$.

Théorème 2.4.15 $\mathbb{R}$ est complet, autrement dit toute suite de Cauchy converge.

Remarque : Ce résultat est faux pour $\mathbb{Q}$.
Preuve : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. On note M la borne de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $A_n = \{u_k,\ k \geq n\}$.
Alors $A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \ldots$. De plus pour tout n, A_n est une partie bornée de $\mathbb{R}$, elle a donc une borne supérieure et une borne inférieure. Soit $\alpha_n = \inf A_n$ et $\beta_n = \sup A_n$.
Alors $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante. De plus, pour $\varepsilon > 0$ donnée, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n, m \geq N$ on ait $|u_n - u_m| < \varepsilon$.
Ainsi, pour tout $m \geq N$ et tout $n \geq N$ on a $u_n \leq u_m + \varepsilon$: $u_m + \varepsilon$ est un majorant de $\{u_n, n \geq N\}$ donc $\beta_N \leq \varepsilon + u_m$, $\forall m \geq N$.
Maintenant, $\beta_N - \varepsilon$ est un minorant de $\{u_m,\ m \geq N\}$ donc $\beta_N - \varepsilon \leq \alpha_N$.
On en déduit que $\beta_N - \alpha_N \leq \varepsilon$ et comme $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on en déduit que pour tout $n \geq N$ on a $\beta_n - \alpha_n \leq \varepsilon$.
Ainsi $\lim_{n\to\infty} \beta_n - \alpha_n = 0$.
Donc $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Soit l leur limite commune. De plus on a $\alpha_n \leq u_n \leq \beta_n$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers l d'après le théorème des gendarmes.

2.5 Suites récurrentes

Définition 2.5.1 On dira que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente s'il existe une fonction f défine sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que pour tout n u_n appartient à I et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Représentation graphique :

Définition 2.5.2 Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite contractante sur I si
– $f(I) \subset I$,
– Il existe $c \in]0, 1[$ tel que pour tout $x, x' \in I$ on ait $|f(x) - f(x')| < c|x - x'|$.
c est appelé rapport de contraction de f sur I.

Théorème 2.5.3 Soit I un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, f une application contractante sur I, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par u_0 appartient à I et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :
– $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy,
– la limite l de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique point de solution dans I de l'équation $f(x) = x$.
– pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|u_n - l| \leq c^n |u_0 - l|$ et $|u_n - l| \leq \frac{c^n}{1-c}|u_1 - u_0|$.

Preuve : Pour $n \in \mathbb{N}$ on a par récurrence $|u_{n+1} - u_n| = |f(u_n) - f(u_{n-1})| \leq c|u_n - u_{n-1}| \leq c^n|u_1 - u_0|$.
Soit $\varepsilon > 0$ donné. Soit $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m$. On a

$$\begin{array}{rcl} |u_n - u_m| & \leq & |u_n - un - 1| + |u_{n-1} - u_{n-2}| + \ldots + |u_{m+1} - u_m| \\ & \leq & (c^{n-1} + \ldots + c^m)|u_1 - u_0| \\ & \leq & |u_1 - u_0| c^m (c^{n-m-1} + c^{n-m-2} + \ldots + c + 1) \\ & \leq & |u_1 - u_0| c^m \dfrac{1 - c^{n-m}}{1 - c} \end{array}$$

Or il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \geq N$ on ait $|u_1 - u_0| c^m \frac{1-c^{n-m}}{1-c} < \varepsilon$ car c appartient à $]0, 1[$.
Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy.
Notons l sa limite. Alors l appartient à I car pour tout n, u_n appartient à I.
Ensuite nous avons

$$0 \leq |u_{n+1} - f(l)| = |f(u_n) - f(l)| \leq c|u_n - l|$$

et quand n tend vers l'infini on obtient $l - f(l) = 0$ donc $f(l) = l$.
Si l_1 et l_2 sont deux racines distinctes de l'équation $f(x) = x$ alors

$$0 \leq |f(l_1) - f(l_2)| < c|l_1 - l_2|$$

et c'est absurde car $c < 1$.
Le dernier point se montre par récurrence.