Chapitre 1

Les Nombres Réels

1.1 Introduction

On appelle :

1. ensemble des *nombres naturels* ou encore des *entiers naturels* et on note $\mathbb{N}$ l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
2. ensemble des *nombres ou des entiers relatifs* et on note $\mathbb{Z}$ l'ensemble $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
3. ensemble des *nombres décimaux* et note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres $a = \frac{\alpha}{10^p}$, $p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{Z}$.
4. ensemble des *nombres rationnels* et on note $\mathbb{Q}$ l'ensemble $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q \neq 0\right\}$.

Alors $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ qui lui-même est inclus dans $\mathbb{D}$ lui même inclus dans $\mathbb{Q}$.

Théorème 1.1.1 $\mathbb{Q}$ est ce que l'on appelle un corps : la somme et le produit de deux éléments de $\mathbb{Q}$ appartient à $\mathbb{Q}$ et tout élément de $\mathbb{Q}$ non nul a un inverse lui-même dans $\mathbb{Q}$.

Problème : essayons de résoudre dans $\mathbb{Q}$ l'équation $x^2 = 2$. Supposons qu'un tel x existe. Alors il s'écrit sous la forme $x = \frac{p}{q}$. Quitte à simplifier la fraction on peut supposer que p et q n'ont pas de multiple commun.
Nous avons $\frac{p^2}{q^2} = 2$ d'où $p^2 = 2q^2$: p^2 est donc un nombre pair.
Si p était un nombre impair, nous pourrions écrire $p = 2k + 1$ et $p^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ et donc p^2 serait aussi impair. Mais cela est faux puisque p^2 est pair, ce qui implique donc que p est pair.
Écrivons donc $p = 2p'$. Il vient alors $4p'^2 = 2q^2$ et donc $q^2 = 2p'^2$. Le nombre q^2 est donc pair et cela implique que q est lui-même pair.
En résumé : p et q sont des multiples de 2 : c'est absurde, on a supposé qu'il n'avait pas de multiple commun ! Cela signifie qu'il n'existe pas $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}$ non nul tel que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.
Pourtant, cet x solution de $x^2 = 2$ est un nombre “réel” que l'on peu dessiner : c'est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 ! Il manque quelque chose à $\mathbb{Q}$ et ce quelque chose, c'est l'ensemble des nombres réels.

1.2 Ébauche de la construction de $\mathbb{R}$

Définition 1.2.1 On appelle relation binaire $\mathcal{R}$ sur un ensemble X la donnée d'un ensemble G de couples (x, y) où x et y sont des éléments de X. Lorsque le couple (x, y) appartient à G, on dit que x est en relation avec y et on note $x\mathcal{R}y$.

Exemple 1.2.2 Considérons l'ensemble X des êtres humains. On peut définir la relation $\mathcal{R}$ sur X suivante : deux êtres humains sont en relations s'ils sont amis sur Facebook.

On peut définir la relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{Z}$: de la manière suivante : x et y dans $\mathbb{Z}$ sont en relation si x divise y.
Sur l'ensemble des fleuves et rivières de France, on peut définir la relation "être un affluent de". Par exemple, l'Oise, est un affluent de la Seine.

Une relation sur ensemble X est donc une assertion dont on peut dire si elle est vraie ou non pour les couples de X.

Définition 1.2.3 Soit X un ensemble et $\prec$ une relation binaire sur X. On dira que $\prec$ est une relation d'ordre si

1. $\prec$ est réflexive : $\forall x \in X\ x \prec x$,
2. $\prec$ est antisymétrique : $\forall x, y \in X$ si $x \prec y$ et $y \prec x$ alors $x = y$,
3. $\prec$ est transitive : $\forall x, y, z \in X$, si $x \prec y$ et $y \prec z$ alors $x \prec z$.

On dit alors que X est un ensemble ordonné.

Exemple 1.2.4 La relation "$\leq$" inférieur ou égal est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$: On peut toujours dire si un nombre est plus grand qu'un autre. La relation d'ordre est totale.
Sur l'ensemble des fleuves et rivières de France, la relation "être un affluent de" est une relation d'ordre mais n'est pas une relation d'ordre totale : on ne peut pas comparer l'Oise, affluent de la Seine à la Durance, affluent du Rhône.

Définition 1.2.5 La relation $\prec$ sur l'ensemble X est dite relation d'ordre totale si pour tout $x, y \in X$ on a toujours $x \prec y$ ou $y \prec x$. On dit que x et y sont toujours comparable. Sinon la relation est dite d'ordre partiel.

Sur $\mathbb{Q}$, la relation inférieur ou égal est une relation d'ordre total. Etant donnée une partie finie $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de $\mathbb{Q}$ on peut ranger tous les éléments A par ordre croissant, et on définit le maximum de A comme étant le plus grand de tous les éléments de A et le minimum comme étant le plus grand des éléments de A. On les notera respectivement $\max A$ et $\min A$. On définit ensuite la valeur absolue comme suit :

Définition 1.2.6 Soit $x \in \mathbb{Q}$. On appelle valeur absolue de x et on note $|x|$ le nombre rationnel $|x| = \max\{x, -x\}$.

Exemple 1.2.7 $|-1/2| = 1/2$, $|2| = 2$.

Théorème 1.2.8 $\mathbb{Q}$ est archimédéen : quel que soit $a, b \in \mathbb{Q}$, avec $a > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b < an$.

Preuve : Si $b \leq 0$, $n = 0$ convient. Sinon, on écrit $a = p/q$ et $b = r/s$, p, q, r, s des entiers strictement positifs. Pour $n = qr + 1$ on a $nps = sp(qr + 1) > rq$ et donc $n \cdot p/q > r/s$.

Définition 1.2.9 Soit X un ensemble, $\prec$ une relation d'ordre sur X et Y une partie de X.
On dit que x élément de X est un majorant de Y si pour tout $y \in Y$ on a $y \prec x$. On dit alors que Y est une partie majorée (par x) de X.
On dit que x élément de X est un minorant de Y si pour tout $y \in Y$ on a $x \prec y$. On dit alors que Y est une partie minorée (par x) de X.
Une partie à la fois majorée et minorée de X est dite bornée.

Exemple 1.2.10 Par exemple, pour la relation d'ordre inférieur ou égale sur $\mathbb{Q}$, la partie $A = \{x \in \mathbb{Q},\ 0 < x \leq 1\}$ est une majorée par 1 et minorée par 0. De plus, tout nombre rationnel négatif est un minorant de A et tout nombre rationnel plus grand que 1 est un majorant de A. on remarquera que 0, le minorant de A n'appartient pas à A mais le majorant 1 oui.

Définition 1.2.11 Soit Y une partie de X ensemble ordonné par la relation $\prec$. L'élément y de Y est dit plus grand élément de Y si pour tout y' de Y on a $y' \prec y$.
L'élément y de Y est dit plus petit élément de Y si pour tout y' de Y on a $y \prec y'$.

Exemple 1.2.12 Pour la relation d'ordre inférieur ou égal, $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément : 0 mais pas de plus grand élément. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$ ne possèdent pas de plus grand élément. $A = \{x \in \mathbb{Q},\ 0 < x \leq 1\}$ possède un plus grand élément mais pas de plus petit éléḿent. En effet, 0 n'est pas un plus petit élément de A car $0 \notin A$. Si $\alpha \in A$ est un plus petit élément de A, alors $\alpha > 0$ et donc $1 \geq \alpha > \alpha/2 > 0$ donc $\alpha/2$ appartient à A mais $\alpha/2 < \alpha$!

Proposition 1.2.13 Le plus petit élément et le plus grand élément, s'ils existent, sont uniques.

Preuve : Soit X un ensemble, $\prec$ une relation d'ordre, Y une partie de X et y et y' deux plus grands éléments de Y. On va montrer qu'en fait $y = y'$. Comme y est un plus grand élément de Y, on a pour tout $x \in Y$ $x \prec y$. En particulier $y' \prec y$. De même, $y \prec y'$. Ainsi $y \prec y'$ et $y' \prec y$ d'où $y = y'$.

Définition 1.2.14 Soit X un ensemble ordonné par $\prec$ et Y une partie de X. On appelle borne supérieure de Y le plus petit des majorants de Y. Autrement dit, $x \in X$ est une borne supérieure de Y si pour tout $y \in Y$ on a $y \prec x$ et si pour tout majorant x' de Y on a $x \prec x'$.
On appelle borne inférieure de Y le plus grand des minorants de Y. Autrement dit, $x \in X$ est une borne inférieure de Y si pour tout $y \in Y$ on a $x \prec y$ et si pour tout minorant x' de Y on a $x' \prec x$.

Proposition 1.2.15 La borne supérieure et la borne inférieure, lorsqu'ils existent, sont uniques.

Notation : On notera $\sup A$ la borne supérieure de A et $\inf A$ la borne inférieure lorsqu'elles existent.

Exemple 1.2.16 Soit $A = \{x \in \mathbb{Q},\ 0 < x \leq 1\}$. Alors $\sup A = 1$ et $\inf A = 0$.

Proposition 1.2.17 Soit A une partie d'un ensemble X ordonné par la relation $\prec$. Alors $\sup A$ appartient à A si et seulement si A a un plus grand élément.

Remarque : On a le résultat analogue avec la borne inférieure. *Preuve :* Supposons que $\alpha = \sup A$ appartient à A. Alors nous avons : α appartient à A et pour tout $a \in A$, $a \prec \alpha$: α est le plus grand élément de A.
Réciproquement, si A possède un plus grand élément α. Alors α est un majorant de A et si α' est un autre majorant de A, comme α appartient à A et que α' est un majorant de A, $\alpha \prec \alpha'$. Ainsi α est le plus petit des majorants : α est la borne supérieure de A.

Théorème 1.2.18 Soit X une partie de $\mathbb{Q}$ qui admet une borne supérieure x. Alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui tendent vers x.

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme x est le plus petit des majorants, $x - 1/n$ n'est pas un majorant de x. Cela signifie qu'il existe $x_n \in X$ tel que $x - 1/n < x_n < x$. Ainsi x_n tend vers x lorsque x tend vers l'infini.

Exemple 1.2.19 Soit $A = \{x \in \mathbb{Q},\ 0 < x \leq 1\}$. Alors $\frac{1}{n}$ tend vers $\inf A$.

Soit $B = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 < 2\}$. Bien que B soit majorée par exemple par 2, B n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. Il existe donc dans $\mathbb{Q}$ des "manques"par rapport à notre espace "réel". Ces manques viennent notamment du fait que certaines parties de $\mathbb{Q}$ n'ont pas de borne supérieure. Les nombres réels comblent ce manque.

Théorème 1.2.20 Il existe un corps totalement ordonné appelé corps des nombres réels et noté $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{Q}$ dans lequel toute partie majorée non vide admet une borne supérieure. Les nombres qui appartiennent à $\mathbb{R}$ mais qui n'appartiennent pas à $\mathbb{Q}$ sont appelés nombres irrationnels.

La borne supérieure de B dans $\mathbb{R}$ est $\sqrt{2}$.
Intuitivement, on obtient $\mathbb{R}$ de la manière suivante : on prend $\mathbb{Q}$, les nombres rationnels et lui "rajoute" les limites des suites de nombres rationnels. Par exemple, $\sqrt{2}$ est la limite de la suite $u_0 = 1, u_1 = 1,4, u_2 = 1,41$ et ainsi de suite.

1.3 Propriétés de $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ hérite de beaucoup des propriétés de $\mathbb{Q}$:

Proposition 1.3.1 Les opérations d'addition et de multiplication sont compatibles avec la relation d'ordre :
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $c \leq d$. Alors $a + c \leq b + d$.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $0 \leq c$. Alors $ac \leq bc$.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$ et $c \leq 0$. Alors $bc \leq ac$.

Théorème 1.3.2 $\mathbb{R}$ est archimédéen : quels que soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $b \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b < an$.

Preuve : Soit $A = \{an,\ n \in \mathbb{N}\}$. Supposons qu'il n'existe pas n tel que $b < an$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $an \leq b$ donc A est bornée par b. La construction de $\mathbb{R}$ implique alors que $\alpha = \sup A$ existe. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:$(n+1)a \leq \alpha$ d'où il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$: $na < \alpha - a$. Ainsi $\alpha - a$ est un majorant de A et $\alpha - a < \alpha = \sup A$: c'est absurde, la borne sup est le plus petit des majorants ! Donc il existe n tel que $b < an$.

Proposition 1.3.3 Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$.

Preuve : Unicité : si n et n' vérifie $n \leq x < n + 1$ et $n' \leq x < n' + 1$ alors $n' < n + 1$ et $n < n' + 1$. Nous avons donc des entiers tels que $n' < n + 1 < n' + 2$ donc $n = n'$.
Existence : Si $x = 0$, il n'y a rien à faire : $n = 0$ convient.
Si x est un entier, il suffit de prendre $n = x$. Sinon, lorsque $x > 0$, on applique le théorème précédent à x et 1 : il existe $m \in \mathbb{N}$, m non nul tel que $x < 1 \cdot m$. Ainsi, l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N},\ x < n\}$ est non vide. Soit des entiers n_0 sont plus petit éléments. Alors $x < n_0$ car n_0 appartient à A et $n_0 - 1 \leq x$ car sinon $x < n_0 - 1$ et n_0 ne serait pas le plus petit élément. On a aussi $n_0 - 1 \neq x$ car x n'est pas entier donc $n_0 - 1 < x < n_0$. L'entier $n = n_0 - 1$ convient.
Si $x < 0$, on raisonne comme ci-dessus avec $-x$ et obtient $n' \in \mathbb{N}$ tel que $n' < -x < n' + 1$. On en déduit que $-n' - 1 < x < n'$ et donc $n = -n' - 1$ convient.

Définition 1.3.4 On appelle partie entière de x et on note $E(x)$ l'entier tel que $E(x) \leq x < E(x)+1$. On appelle partie fractionnaire et note $Fr(x)$ le réel de $[0, 1[$ tel que $x = E(x) + Fr(x)$.

Exemple 1.3.5 $E(1,3) = 1$, $Fr(1,3) = 0,3$, $E(-1,1) = -2$, $Fr(-1,1) = 0,9$

Définition 1.3.6 On définit l'intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ par :

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}.$$

Par extension :

$$\begin{array}{rcl}
[a,b[& = & \{x\in\mathbb{R},\ a\le x\le b \text{ et } x\ne b\},\\
]a,b] & = & \{x\in\mathbb{R},\ a\le x\le b \text{ et } x\ne a\},\\
]a,b[& = & \{x\in\mathbb{R},\ a\le x\le b \text{ et } x\ne b \text{ et } x\ne a\},\\
]-\infty,b] & = & \{x\in\mathbb{R},\ x\le b\},\\
]-\infty,b[& = & \{x\in\mathbb{R},\ x\le b \text{ et } x\ne b\},\\
[a,+\infty[& = & \{x\in\mathbb{R},\ a\le x\},\\
]a,+\infty[& = & \{x\in\mathbb{R},\ a\le x \text{ et } x\ne a\}.
\end{array}$$

Définition 1.3.7 Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et x un élément de $\mathbb{R}$. On dira que X est un voisinage de x s'il existe un intervalle $]a,b[$ inclus dans X tel que x appartienne à $]a,b[$.

Proposition 1.3.8 Tout intervalle de longueur non nulle contient au moins un nombre rationnel.

Preuve : Soit $]a,b[$ un intervalle de longueur non nulle, c'est à dire $a<b$. Considérons le réel $b-a>0$ et le réel 1. Comme $\mathbb{R}$ est archimédéen, il existe $q\in\mathbb{N}$ tel que $1<q(a-b)$ donc l'intervalle $]qa,qb[$ est de longueur strictement plus grande que 1. Il existe donc un entier p dans l'intervalle $]qa,qb[$. Ainsi, p/q est un rationnel de l'intervalle $]a,b[$.

Corollaire 1.3.9 Quel que soit $x\in\mathbb{R}$, quel que soit V voisinage de x, il existe un rationnel dans V.

Preuve : Soit $x\in\mathbb{R}$, V un voisinage de x et $]a,b[$ un intervalle inclus dans V qui contient x. Alors d'après le théorème précédent, il existe un rationnel p/q dans $]a,b[$ donc dans X.

Corollaire 1.3.10 Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres rationnels qui tend vers x.

Preuve : Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\ne 0$. Alors il existe un rationnel x_n dans l'intervalle $]x-1/n,x+1/n[$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers x puisque la distance entre x et x_n est au plus $1/n$.

N'importe lequel de ces corollaires ainsi que la dernière proposition se traduit en disant que $\mathbb{Q}$ est *dense* dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.3.11 Soit $x\in\mathbb{R}$. On appelle valeur absolue de x et on note $|x|$ le nombre $|x|=\sup\{-x,x\}$.

Proposition 1.3.12
1. $\forall x\in\mathbb{R}$, $|x|=0$ si et seulement si $x=0$.
2. $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $|x+y|\le|x|+|y|$ (inégalité triangulaire).
3. $\forall x\in\mathbb{R}$, $|-x|=|x|$.
4. $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $|xy|\le|x|\cdot|y|$.
5. $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $||x|-|y||\le|x-y|\le|x|+|y|$.
6. $\forall x,y\in\mathbb{R}$ tel que $y>0$, $|x|<y$ si et seulement si $-y<x<y$.

Preuve :