L1 MASS — Correction de l'interrogation n°2 — 20/12/2013

Analyse.

Ex 1

1. $\exists M \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$

2. $\forall \ell \in \mathbb{R},\ \exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0$ et $|u_n - \ell| \geq \varepsilon$.

3. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \text{ et } m \geq n_0) \Rightarrow |u_n - u_m| < \varepsilon$.

Ex 2

1) $$u_1 = \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$u_2 = \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2+k} = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

$$u_3 = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{3+k} = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3+2} + \frac{1}{3+3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}.$$

2) $$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$$= \cancel{\frac{1}{n+2}} + \cancel{\frac{1}{n+3}} + \cancel{\frac{1}{n+4}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n}} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \left(\frac{1}{n+1} + \cancel{\frac{1}{n+2}} + \dots + \cancel{\frac{1}{2n}}\right)$$

$$= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0.$$

Donc $(u_n)_n$ est croissante.

3) On montre que (u_n) est majorée. Ainsi (u_n) sera une suite majorée et croissante donc convergente.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors :

$$1 \leq k \leq n \Rightarrow 1+n \leq k+n \leq 2n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k+n} \leq \frac{1}{n+1}$$

Donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1}$ (on ajoute pour k allant de 1 à n les inégalités ci-dessus).

Alors : $u_n \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} \leq 1$.

Donc (u_n) est majoré par 1 et croissante, elle converge.

Ex 3.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $-1 \leq \sin\left(n^2 \frac{\pi}{2}\right) \leq 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $$-\frac{1}{n+1} \leq \frac{\sin\left(n^2 \frac{\pi}{2}\right)}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} -\frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes implique que $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{n^2 \pi}{2}\right)}{n+1} = 0$.

2. $$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n^2+n+4} - \sqrt{n^2+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\cancel{n^2}+n+4-\cancel{n^2}-1}{\sqrt{n^2+n+4}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n+3}{\sqrt{n^2+n+4}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{n\left(1+\frac{3}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1+3/n}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = \frac{1}{2}.$$