L1 MASS — Analyse. — Correction de l'interrogation n°1 — 2012/2013

Ex 1 :

1. Les majorants de E sont les éléments de $[5,+\infty[$.
- " minorants " " " $]-\infty,0]$
- $\sup E = 5$
- $\inf E = 0$
- Le plus grand élément de E est 5
- E n'a pas de plus petit élément.

2.a. Soit M un majorant de B et a un élément de A.
Alors B est majorée par M et non vide car $a\in A$ et $A\subset B$ donc a appartient à B. Donc comme toute partie majorée et non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, B admet une borne supérieure.
A est non vide et majorée par M donc, de même, A admet une borne supérieure.

2 b. $\sup B$ est majorant de B donc $\forall x\in B,\ x\leq \sup B$.
Comme $A\subset B$, on en déduit que $\forall x\in A,\ x\leq \sup B$ et donc $\sup B$ est un majorant de A.
Comme $\sup A$ est le plus petit des majorants, $\sup A\leq \sup B$

Ex 2

Soit $u_0 = 0{,}56$ et $(u_n)_n$ la suite géométrique de raison $\frac{1}{100}$ et de premier terme u_0.

Alors
$$a = 1 + u_0 + u_1 + \dots$$
$$= 1 + \lim_{n\to+\infty} u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

Or,
$$u_0 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1-\left(\frac{1}{100}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{100}}$$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_0 + \dots + u_n = u_0 \times \dfrac{1}{1 - 1/100}$ car $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{100}\right)^{n+1} = 0$

$$= \frac{56}{99}$$

Ainsi, $a = \dfrac{99+56}{99} = \dfrac{155}{99}$

Ex 3 : On calcule $|x+3| - |7-x|$ pour $x \in \mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-3		7	$+\infty$
$\lvert x+3\rvert$	$-x-3$	0	$x+3$	10	$x+3$
$\lvert 7-x\rvert$	$7-x$	10	$7-x$	0	$x-7$
$\lvert x+3\rvert - \lvert 7-x\rvert$	-10	-10	$2x-4$	10	10

sur $]-\infty, -3]$: $|x+3| - |7-x| = -10 < 0$.

sur $[-3, 7]$: $|x+3| - |7-x| \geq 0 \iff 2x - 4 \geq 0$

$\iff x \geq 2$

sur $[7, +\infty[$: $|x+3| - |7-x| = 10 > 0$

Ainsi $|x+3| - |7-x| \geq 0 \iff x \in [2, +\infty[$.