Université Lille 1 **2011/2012**
L1 MASS

Analyse
–
DEVOIR SURVEILLÉ : DURÉE 2H

Les documents et les calculatrices sont interdits.

Exercice 1 Déterminer (s'ils existent) : les majorants, les minorants, la borne supérieure, la borne inférieure, le plus grand élément, le plus petit élément de l'ensemble $A = \{0\} \cup]1, 2[$. Justifier.

Exercice 2 Etudier la convergence et préciser la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

1. $u_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$.
2. Pour $n \geq 0$, $u_n = 2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^2} + \ldots + \frac{2}{3^n}$.
3. $u_n = \frac{(\cos n)^n}{n}$.

Exercice 3

1. (a) Déterminer D_f, le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+1} - x$.
   (b) Dresser le tableau de variations de $f : D_f \to \mathbb{R}$.
   (c) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
2. Soit (u_n) la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \leq u_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   (b) Montrer que (u_n) est croissante.
   (c) Montrer que (u_n) converge vers un nombre réel positif ℓ et calculer ℓ.

Exercice 4 Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & E(x) \end{array} \right.$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.
1. Calculer $E(0)$, $E(1,5)$ et $E(-0,5)$.
2. Tracer la courbe représentative de f (On prendra 1 unité = 2cm en abscisse et en ordonnée).
3. Déterminer tous les points $x_0 \in \mathbb{R}$ tels que f est continue en x_0. Justifier.

Exercice 5 **1.** Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \frac{1}{x}$. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$
2. En déduire la valeur de $\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Exercice 6 **1.** Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln t \end{array} \right.$. En appliquant le théorème des accroissements finis à f, montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a

$$\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln(x) < \frac{1}{x}.$$

2. En déduire que pour tout $x > 0$ on a

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 1 < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$