Licence MASS 2012/2013

Devoir analyse du 17 décembre 2012 - Correction.

Ex 1 :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} (x-2)E\left(\frac{x}{2}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x-2$ car puisque x tend vers 2 par valeur plus grande que 2,

$= 0.$

$\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (x-2)E\left(\frac{x}{2}\right) = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} 0$ car puisque x tend vers 2 par valeur plus petite que 2, $x<2$ donc $\frac{x}{2}<1$ et puisque x tend vers 2, $\frac{x}{2}>0$.

$= 0$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x}-x+3 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+4x-x^2+6x-9}{\sqrt{x^2+4x}+x-3}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(10-\frac{9}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1-\frac{3}{x}\right)}$

$= 5.$

3. On applique le théorème des gendarmes :

On a : $0 \leq \left|\cos\frac{1}{x}\right| \leq 1$

Donc $0 \leq \left|\cos\frac{1}{x}\right| |\cos x - 1| \leq |\cos x - 1|$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \cos x - 1 = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}(\cos x - 1) = 0.$

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln(x+1)}{\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sin^2 x} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$

$= 1$ car $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1.$

Ex 2

1. $f(0) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, $f(1) = \arctan 0 = 0$

2. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to -1} \arctan X$ car $\lim_{x \to +\infty} \frac{1-x}{1+x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x\left(-1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = -1$

$= -\frac{\pi}{4}$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{X \to -1} \arctan X$ car $\lim_{x \to -\infty} \frac{1-x}{1+x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(\frac{1}{x}-1\right)}{x\left(\frac{1}{x}+1\right)} = -1$

$= -\frac{\pi}{4}$.

3. On a $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{1-x}{1+x} = +\infty$ donc $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{X \to +\infty} \arctan X = \frac{\pi}{2}$.

$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{1-x}{1+x} = -\infty$ donc $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = \lim_{X \to -\infty} \arctan X = -\frac{\pi}{2}$

Comme $\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$, on ne peut pas prolonger f par continuité en -1.

4. Soit $x \neq -1$. On a :

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \times \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2}$$

$$= -\frac{2}{(1+x)^2+(1-x)^2}$$

$$= -\frac{2}{2+2x^2}$$

$$= -\frac{1}{1+x^2}.$$

5. Pour $x<-1$, on a $f'(x) = -(\arctan x)'$ donc $f(x) = -\arctan x + c$.

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -\arctan x + c = \frac{\pi}{2} + c$

Ainsi $c = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{4}$.

Pour $x>-1$, on a de même $f(x) = -\arctan x + c'$.

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\frac{\pi}{4}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\arctan x + c' = -\frac{\pi}{2} + c'$, on a $c' = \frac{\pi}{4}$.

Conclusion : si $x<-1$, $f(x) = -\arctan x - \frac{3\pi}{4}$

si $x>-1$, $f(x) = -\arctan x + \frac{\pi}{4}$.

Ex 3.

1.a La fonction g est dérivable comme composée et somme de fonctions dérivables.

$\forall x \geq 0$, on a : $g'(x) = -e^{-1-x} - 1 < 0$

On a alors le tableau de variation suivant :

x	0		$+\infty$
g'		$-$	
g	e^{-1}	$\searrow$	$-\infty$

1.b Comme $g : [0,+\infty[\to]-\infty, e^{-1}]$ est strictement décroissante et continue, g est une bijection de $[0,+\infty[$ dans $]-\infty, e^{-1}]$. Ainsi, l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in [0,+\infty[$ car $0 \in]-\infty, e^{-1}]$.

Maintenant $g(x) = 0 \iff f(x) - x = 0$

$\iff f(x) = x$

Donc l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha \in [0,+\infty[$.

1.c $g(0) = e^{-1} > 0$ et $g(\frac{1}{e}) = e^{-1-\frac{1}{e}} - e^{-1} < 0$ car la fonction exponentielle est croissante et $-1-\frac{1}{e} < -1$ donc $e^{-1-\frac{1}{e}} < e^{-1}$.

Ainsi, comme $g(0)>0$ et $g(\frac{1}{e})<0$, et comme g est continue, d'après le théorème de Bolzano, l'équation $g(x)=0$ admet une solution dans l'intervalle $[0, \frac{1}{e}]$ donc $\alpha \in [0, \frac{1}{e}]$.

<u>1.d</u> On applique le théorème des accroissements finis sur $[0, \frac{1}{e}]$ à f.
f est dérivable sur $[0, \frac{1}{e}]$ donc $\forall x, y \in [0, \frac{1}{e}]$, on a :

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup_{[0, \frac{1}{e}]} |f'| \, |x-y|.$$

Or $f'(t) = -e^{-1-t}$ donc $|f'(t)| = e^{-1-t} \leq e^{-1}$ $\forall t \geq 0$ car $-1-t \leq -1$.

Donc $|f(x) - f(y)| \leq e^{-1} |x-y|$

<u>1.e</u> Soit $x \in [0, \frac{1}{e}]$. Alors $0 \leq x \leq e^{-1}$

Donc $-1 \geq -1-x \geq -1-e^{-1}$

d'où $e^{-1} \geq e^{-1-x} \geq e^{-1-e^{-1}} \geq 0$

Ainsi $e^{-1} \geq f(x) \geq 0$ et $f(x) \in [0, \frac{1}{e}]$.

<u>2.a</u> On raisonne par récurrence sur n.
* Initialisation : $u_0 \in [0, e^{-1}]$
* Hérédité : Supposons que $u_n \in [0, e^{-1}]$. Alors $f(u_n) \in [0, e^{-1}]$ d'après la question 1.e donc $u_{n+1} \in [0, e^{-1}]$.
* Conclusion : $u_0 \in [0, e^{-1}]$ et si $u_n \in [0, e^{-1}]$ alors $u_{n+1} \in [0, e^{-1}]$. Donc par principe de récurrence, $u_n \in [0, e^{-1}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>2.b.</u> $u_0 \in [0, e^{-1}]$ et $\alpha \in [0, e^{-1}]$ donc $0 \leq u_0 \leq e^{-1}$ et $-e^{-1} \leq -\alpha \leq 0$

On en déduit que $-e^{-1} \leq u_0 - \alpha \leq e^{-1}$ c'est à dire $|u_0 - \alpha| \leq e^{-1}$.

Encore une fois on raisonne par récurrence.
* Initialisation : Nous venons de montrer que $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{e^{0+1}}$.
* Hérédité : Supposons que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^{n+1}}$.

D'après la question 1.d, comme $u_n \in [0, \frac{1}{e}]$ et $\alpha \in [0, \frac{1}{e}]$, on a :

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{e} |u_n - \alpha|.$$

D'une part $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$.

D'autre part, par hypothèse de récurrence $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^{n+1}}$.

On en déduit alors :

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e} \times \frac{1}{e^{n+1}} = \frac{1}{e^{n+2}}.$$

* Conclusion : $|u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{e}$ et si $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^{n+1}}$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{e^{n+2}}$.

Par principe de récurrence, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^{n+1}}$

2.c On applique le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{n+1} = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{e^{n+1}} = 0$.

Comme pour tout n, $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^{n+1}}$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \alpha$.

2.d Si $\frac{1}{e^{n+1}} \leq 10^{-6}$, on a $|u_n - \alpha| \leq 10^{-6}$.

Or
$$\frac{1}{e^{n+1}} \leq 10^{-6} \iff 10^6 \leq e^{n+1}$$
$$\iff 6 \ln 10 \leq n+1$$
$$\iff n \geq 6 \ln 10 - 1.$$

Donc si $n \geq 6 \ln 10 - 1$, on a $|u_n - \alpha| \leq 10^{-6}$.

Maintenant $\ln 10 = \ln(2 \times 5)$
$= \ln 2 + \ln 5$

Donc $\ln 2 + \ln 5 \leq 0,7 + 1,61 = 2,31$

et $6 \ln 10 - 1 \leq 6 \times 2,31 - 1 = 13,86 - 1 = 12,86$

Ainsi, pour $n_0 = 13$, on a $n_0 \geq 12,86 \geq 6 \ln 10 - 1$ donc $\frac{1}{e^{n_0+1}} \leq 10^{-6}$ et

$$|u_{n_0} - \alpha| \leq \frac{1}{e^{n_0+1}} \leq 10^{-6}.$$