Analyse

–

DEVOIR SURVEILLÉ : DURÉE 2H

Les documents et les calculatrices sont interdits.

Exercice 1 Calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to 2}(x-2)E\left(\frac{x}{2}\right)$.
2. $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+4x}-x+3$.
3. $\lim_{x\to 0}\cos(\frac{1}{x})(\cos x-1)$.
4. $\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(x+1)}{(\sin x)^2}$.

Exercice 2 Soit f la fonction réelle dont l'expression est $f(x)=\arctan\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

1. Calculer $f(0)$, $f(1)$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)$.
2. Peut-on prolonger par continuité la fonction f en $x=-1$? Justifier.
3. Montrer que pour tout $x\in\mathcal{D}_f$, $f'(x)=-\frac{1}{1+x^2}$.
4. En déduire que $f(x)=-\frac{3\pi}{4}-\arctan(x)$ si $x<-1$ et $f(x)=\frac{\pi}{4}-\arctan(x)$ si $x>-1$ (on pourra par exemple utiliser les valeurs de $f(0)$ et $\lim_{x\to-\infty}f(x)$).

Exercice 3 Le but de cet exercice est de trouver une valeur approchée de l'unique solution de l'équation $f(t)=t$ où

$$f:\left\{\begin{array}{ccc}[0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\\ t & \longmapsto & e^{-1-t}\end{array}\right. .$$

1. (a) Donner le tableau de variation de l'application $g:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $g(t)=f(t)-t$.
   (b) Montrer que l'équation $f(t)=t$ admet une unique solution que l'on notera α.
   (c) Montrer que α appartient à $[0,\frac{1}{e}]$.
   (d) Montrer que pour tout couple (x,y) de nombres réels positifs,
   $$|f(x)-f(y)|\leq\frac{1}{e}|x-y|.$$
   (e) Prouver que pour tout $x\in[0,\frac{1}{e}]$, $f(x)$ appartient encore à $[0,\frac{1}{e}]$.
2. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par la condition initiale $u_0=0$ et la relation de récurrence $u_{n+1}=f(u_n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_n\leq\frac{1}{e}$.
   (b) Montrer que $|u_0-\alpha|\leq\frac{1}{e}$ puis, en utilisant la question (1d), montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha|\leq\frac{1}{e^{n+1}}$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge vers α.
   (d) Déterminer un entier naturel n_0 tel que $|u_{n_0}-\alpha|\leq 10^{-6}$. On donne pour cela les encadrements suivants :

$$0,69\leq\ln 2\leq 0,70$$
$$1,09\leq\ln 3\leq 1,10$$
$$1,38\leq\ln 4\leq 1,39$$
$$1,60\leq\ln 5\leq 1,61$$