Université Lille 1 **2011/2012**
L1 MASS

Analyse

–

DEVOIR SURVEILLÉ : DURÉE 2H

Les documents et les calculatrices sont interdits.

Exercice 1 Etudier la convergence et préciser la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.
2. $u_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $u_n = \frac{5}{6} + \frac{5}{18} + \frac{5}{54} + \ldots + \frac{5}{2\cdot 3^n}$.
3. $u_n = \frac{\cos n}{n^2}$.

Exercice 2 1. Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \frac{1}{x}$. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$
2. En déduire la valeur de $\text{Arctan}\, x + \text{Arctan}\, \frac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

Problème

Les différentes parties peuvent être traitées séparemment dans l'ordre que vous choisirez. Vous pouvez utilisez informations des questions précédentes même si vous n'êtes pas parvenu à y répondre.

— Partie I —

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{e^x-1}{x}, \text{ si } x \neq 0, \text{ 1 sinon} \end{cases}$.

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$ (On précisera pourquoi f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$).
   (c) Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x^2}$. En déduire que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
   (d) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $1 \leq f(x) \leq e^x$ (On pourra appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction exponentielle sur $[0, x]$).

— Partie II —

Soit g la fonction définie par $g(x) = \ln\left((f(x)\right) - x$.

1. Vérifier que g est bien définie sur $[0, +\infty[$.
2. Calculer $g(0)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
3. Etudier les variations de g.
4. En déduire que $g : [0, +\infty[\to] - \infty, 0]$ est une bijection. Donner le tableau de variation de son application réciproque g^{-1}.
5. Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

— Partie III —

Soit $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \ln f(u_n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.