MASS 109 - L1

Epreuve d'algèbre

Le 28 Mai, durée 2h

Documents interdits. Calculatrices interdites.

Exercice I (10pts)

Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linéaire définie par $f(e_1) = -e_1 + e_2 + e_3$, $f(e_2) = -2e_1 + 2e_3$, $f(e_3) = -4e_1 + e_2 + 4e_3$.

1)Donner A la matrice de f dans (e_1, e_2, e_3).

2)Donner une base de Imf.

3)Pour quelles valeurs de $t \in \mathbb{R}$, l'application linéaire $f - tId_{\mathbb{R}^3}$ est une bijection?

4)Donner un vecteur v_1 qui est une base de $ker(f - 3Id_{\mathbb{R}^3})$ et un vecteur v_2 qui est une base de $ker(f)$. Montrer que (v_1, v_2, e_1) forme une base de $\mathbb{R}^3$.

5)Ecrire la matrice de f dans cette base.

Exercice II (11pts)

Soient u_n, v_n deux suites réelles définies par $u_0 = 0$, $v_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + v_n$, $v_{n+1} = 3u_n - v_n$. Dans ce qui suit, on note (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, X_n le vecteur (u_n, v_n) de $\mathbb{R}^2$.

1)Trouver A la matrice 2×2 telle que $X_{n+1} = AX_n$. Calculer les valeurs propres de A.

2)Trouver deux vecteurs $u \neq 0$ et $v \neq 0$ tels que : $A(u) = 2u$, $A(v) = -2v$. Ecrire B la matrice associée à A dans la base (u, v).

3)Donner P(resp. P^{-1})la matrice de passage de (u, v) à (e_1, e_2)(resp. la matrice de passage de (e_1, e_2) à (u, v)). Exprimer A en fonction de B, P et P^{-1}.

4)En déduire A^n en fonction de n.

5)Exprimer X_n en fonction de A^n et de X_0 ; en déduire l'expression de u_n, v_n en fonction de n.