Université Lille 1 **2009/2010**
L1 MASS

Algèbre - Examen semestre 1

–

15 JANVIER 2010-DURÉE 2H

Aucun document n'est autorisé, les calculatrices sont interdites, les téléphones portables sont éteints et rangés.

Exercice 1 Soit P la proposition suivante : "Pour tout élément v appartenant à E, il existe un unique n-uplet $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ appartenant à $\mathbb{R}^n$ tel que v soit égal à $v_1e_1 + v_2e_2 + \ldots + v_ne_n$".
1. Ecrire P à l'aide des quantificateurs.
2.a. Ecrire la négation de P sans utiliser les quantificateurs.
2.b. Ecrire la négation de P en utilisant les quantificateurs.

Exercice 2 **1.** Rappeler la définition d'un nombre premier.
Le but de l'exercice est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il n'existe que N nombres premiers que l'on note $p_1, \ldots, p_N$.
2. Soient $a_1, \ldots, a_{N+1}$ $N+1$ nombres entiers. Montrer qu'il existe i, j, $i \neq j$, tels que a_j et a_i aient un diviseur commun différent de ± 1.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n = 2^{2^n} + 1$.
3.a. Calculer F_0, F_1, F_2.
3.b. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $2^{2^{n+k}} - 1 = (2^{2^n} - 1) \cdot F_n \cdot F_{n+1} \ldots F_{n+k-1}$. (On pourra raisonner par récurrence sur k). En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+k} = 2 + (2^{2^n} - 1)F_n \cdot F_{n+1} \ldots F_{n+k-1}$.
3.c. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $F_{n+k} \wedge F_n = 2 \wedge F_n$ où $a \wedge b$ désigne le pgcd des entiers a et b .
3.d. En déduire que F_{n+k} et F_n sont premiers entre eux.
4. En considérant $F_1, \ldots, F_{N+1}$ montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 3 **1.** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Rappeler la définition d'un sous espace vectoriel de E.
2. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ? Justifier.
2.a. $\{f \in C^0(\mathbb{R}),\ f(1) = 0\}$ où $C^0(\mathbb{R})$ désigne le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
2.b. $\{f \in C^0(\mathbb{R}),\ f(0) = 1\}$.
2.c. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + 2y + 3z = 0\}$.
2.d. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ e^x - e^y = 0\}$.
2.e. $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 - y = 0\}$.

Exercice 4 On se place dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. Soit $v_1 = (1, 2, 3), v_2 = (3, 3, 3)$ et $v_3 = (4, 5, 6)$.
1.a. Montrer que v_1, v_2 est une famille libre.
1.b. Montrer que v_2, v_3 est une famille libre.
1.c. Montrer que v_1, v_3 est une famille libre.
2. La famille v_1, v_2, v_3 est-elle libre ?
3. Déterminer la dimension de $F = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$, le sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par v_1, v_2, v_3.

Exercice 5 On se place dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
1. Montrer que $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (-1, 1, 0)$ et $v_3 = (1, 0, -1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer les coordonnées de $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (1, 0, 1)$ et $w_3 = (0, 0, 1)$ dans la base v_1, v_2, v_3.