Université Lille 1 **2009/2010**
L1 MASS

Algèbre

–

CONTRÔLE CONTINU N° 1

Aucun document n'est autorisé, calculatrices interdites

Exercice 1 On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer en raisonnant par l'absurde qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 1 tel que $P(X+1) = P(X)$.
2. Montrer en raisonnant par récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $P(X+1) = P(X)$.
3. En déduire que si $P \in \mathbb{R}[X]$ satisfait $P(X+1) = P(X)$ alors P est constant.

Exercice 2 **1.** Soit E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application et P_1 la proposition P_1 : " Pour tout y élément de F, il existe un unique x appartenant à E tel que $f(x) = y$."
1.a. Ecrire la proposition P_1 à l'aide des quantificateurs.
1.b. Donner la négation de P_1.
2. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application et P_2 la proposition P_2 : "Pour tout x élément de $\mathbb{R}$ et tout ε strictement positif , il existe η strictement positif tel que pour tout y appartenant à $\mathbb{R}$, $|x-y|$ strictement inférieur à η implique $|f(x) - f(y)|$ strictement inférieur à ε."
2.a. Ecrire la proposition P_2 à l'aide des quantificateurs.
2.b. Ecrire la négation de la proposition de P_2.

Exercice 3 **1.** Soit $P(X) = X^3 + 2X^2 - 32X - 96$. Sachant que P admet une racine d'ordre 2, écrire P comme produit de polynôme de degré 1.
2. Soit $Q(X) = z^2 + z(1-2i) - 3 - i$. Déterminer les racines de Q.

Exercice 4 Le but de l'exercice est de calculer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. On pose $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.
1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$ on a

$$1 + z + \ldots + z^n = \frac{z^{n+1} - 1}{z - 1}.$$

2.a. Montrer que $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$.
2.b. Montrer que $\alpha^2 = \overline{\alpha}$.
2.c. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.
3.a. Rappeler les formules d'Euler et de Moivres.
3.b. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b, \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b. \end{aligned}$$

3.c. En déduire que $2\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 1$ puis la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.