Université Lille 1 **2011/2012**
L1 MASS

Algèbre

–

DEVOIR SURVEILLÉ - DURÉE 2H

Aucun document n'est autorisé, calculatrices interdites

Exercice 1 Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$. On définit $\exp(z)$ en posant $\exp(z) = e^x \times e^{iy}$.

1. Déterminer le module et un argument de $\exp(z)$ en fonction de x et de y.
2. Montrer que $\exp(z + z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$.
3. On fixe $Z = Re^{i\theta} \in \mathbb{C}$, $R > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre, si possible, l'équation $\exp(z) = Z$, dont l'inconnue est $z = x + iy$ (on exprimera x et y en fonction de R et θ).
4. L'application $\exp : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \exp(z) \end{array} \right.$ est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 2

1. Soit x un nombre irrationnel. Montrer que $1 - x$ est irrationnel.
2. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{ll} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right. \end{array} \right.$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f \circ f(x) = x$.
3. f est-elle bijective ? Justifier.

Exercice 3 Pour tout entier naturel n, on pose

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n.$$

Démontrer que l'on a

$$S_n = \frac{1}{3} n(n-1)(n+1).$$

Exercice 4 Soient a, b des entiers supérieurs ou égaux à 1.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^b - 1 = (x - 1)(x^{b-1} + x^{b-2} + \ldots + x + 1)$.
2. En déduire que $2^a - 1$ divise $2^{ab} - 1$.
3. Montrer que si $2^p - 1$ est premier alors p est premier .

Exercice 5

1. Calculer de deux manières différentes $a = pgcd(720, 252)$ et $b = ppcm(720, 252)$.
2. Déterminer deux entiers u et v tels que $720u + 252v = a$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}$, si possible, l'équation $720x + 252y = 1$ et d'inconnues x et y.
4. Même question pour l'équation $720x + 252y = 72$.