Université Lille 1 **2010/2011**
L1 MASS

Algèbre

–

DEVOIR SURVEILLÉ, DEUXIÈME SESSION, DURÉE 2H

Aucun document n'est autorisé, calculatrices interdites

Exercice 1 Linéariser le polynôme trigonométrique suivant : $(\cos x)^3(\sin x)^2$.

Exercice 2 Soient A, B et C trois propositions. Montrer que l'implication suivante

$$(A \text{ et } B) \Rightarrow C$$

est équivalente à l'implication

$$(A \text{ et non } C) \Rightarrow \text{ non } B.$$

Exercice 3 Soit f une application définie sur $[0,1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Ecrire avec les quantificateurs puis donner la négation toujours avec les quantificateurs des assertions suivantes :
1. Quel que soit x dans l'intervalle $[0,1]$, $f(x)$ est supérieur ou égal à 1 et inférieur ou égal à 2.
2. Il existe un unique x dans l'intervalle $[0,1]$ tel que $f(x)$ soit égal à 2.
3. Il existe x inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$ tel que $f(x)$ soit différent de 2.
4. Pour tout x dans l'intervalle $[0,1]$, on a : x est inférieur ou égal à $\frac{1}{2}$ et $f(x)$ est strictement supérieur à 4.

Exercice 4 Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n+1) = (n+1)^2.$$

Exercice 5 Soit la propriété $P(n)$: $5^n + 1$ est un multiple non nul de 4.
1. Cette propriété est-elle vraie pour $n = 0$?
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'implication $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ est vraie.
3. Peut-on en conclure que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$? $n \geq 1$?

Exercice 6 **1.** Déterminer selon les valeurs de l'entier relatif n à quoi est congru n^2 modulo 8.
2. En déduire que $n^2 \equiv 1 \mod 8$ si et seulement si n est impair.
3. Résoudre pour (m,n) dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation

$$8m + 1 = n^2.$$

Exercice 7 **1.** Soient $(G, *)$ et $(H, \cdot)$ deux groupes. Donner la définition d'un morphisme de G dans H.
2. Dans $\mathbb{R}^3$ on définit l'opération $\oplus$ en posant $(x,y,z) \oplus (x', y'; z') = (x+x', y+y', z+z')$. Montrer que $(\mathbb{R}^3, \oplus)$ est un groupe.
3. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (4x+5y, 2x+3y, x+z) \end{array} \right.$.
3.a. Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}^3, \oplus)$ dans lui-même.
3.b. Montrer que $\ker f = \{(0,0,0)\}$. Le morphisme f est-il injectif ?