Université Lille 1 **2011/2012**
L1 MASS

Algèbre

–

DEVOIR SURVEILLÉ - DURÉE 2H

Aucun document n'est autorisé, calculatrices interdites

Exercice 1 On veut calculer $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$. Pour cela, on pose $a = 2\cos\frac{2\pi}{5}$, $b = 2\cos\frac{4\pi}{5}$ et $z = e^{2i\pi/5}$.

1. Vérifier que $a = z + z^4$ et $b = z^2 + z^3$.
2. Montrer que $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 = 0$.
3. Calculer $a + b$ et $a \cdot b$.
4. En déduire a et b puis les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\sin\frac{2\pi}{5}$.
5. En déduire au moyen d'une formule de trigonométrie la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{5}$ et de $\sin\frac{\pi}{5}$.

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x + 1$ et $g(x) = x^2 - 1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$? Justifier.

Exercice 3 **1.** Montrer que $10^3 - 1$ et $10^6 - 1$ sont divisibles par 111.
2. Démontrer par récurrence que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $10^{6n+2} + 10^{3n+1} + 1$ est divisible par 111.

Exercice 4 **1.** En raisonnant par contraposée, montrer que si $p_1, p_2, \ldots, p_r$, sont r nombres premiers alors $N = p_1 p_2 \ldots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i.
2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 5 **1.** Déterminer de deux manières différentes le PGCD et le PPCM de 84 et 385.
2. Résoudre, si possible, les équations diophantiennes suivantes.
2.a. $84x + 385y = 7$
2.b. $84x + 385y = 21$
2.c. $84x + 385y = 1$
3. Résoudre le système d'équation

$$\left\{\begin{array}{lcll} z & \equiv & 3 & \mod 84 \\ z & \equiv & 381 & \mod 385 \end{array}\right. .$$