Université Lille 1 **2010/2011**
L1 MASS

Algèbre

–

DEVOIR SURVEILLÉ, PREMIÈRE SESSION, DURÉE 2H

Aucun document n'est autorisé, calculatrices interdites

Exercice 1 Soit E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. On note $\complement$ le complémentaire dans E d'un sous-ensemble de E. Montrer que $\complement\left(A \cup \complement B\right) = \left(\complement A\right) \cap B$.

Exercice 2 Donner la négation des propositions suivantes.
1. Toutes les voitures rouges sont rapides.
2. Toutes les voitures sont rouges et rapides
3. Il existe une unique voiture rouge et rapide.
4. Il existe une voiture rapide qui n'est pas rouge.

Exercice 3 En raisonnant par l'absurde, montrer que $\sqrt{5}$ n'est pas un nombre rationnel.

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(1+2i)z^2 + 5z + 1 - 3i = 0$$

On mettra les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

Exercice 5 Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$.
1.a. En dressant une table de vérité, montrer que les deux implications

$$P : \quad (\text{pgcd}(a,b) = 1 \text{ et } \text{pgcd}(c,b) = 1) \Rightarrow \text{pgcd}(ac,b) = 1$$

et

$$Q : \quad (\text{pgcd}(a,b) = 1 \text{ et } \text{pgcd}(ac,b) \neq 1) \Rightarrow \text{pgcd}(c,b) \neq 1$$

sont équivalentes.
1.b. En déduire que si $\text{pgcd}(a,b) = 1$ et $\text{pgcd}(c,b) = 1$ alors $\text{pgcd}(ac,b) = 1$.
2. On suppose que $\text{pgcd}(a,b) = 1$.
2.a. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{pgcd}(a^n, b) = 1$.
2.b. En déduire pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$ on a $\text{pgcd}(a^n, b^m) = 1$.
3. On ne suppose plus à partir de maintenant que a et b sont premiers entre eux. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n \wedge b^n = (a \wedge b)^n$.
4. Calculer le PGCD de 3080^{12} et 3276^{12}.

Exercice 6 **1.** Donner la définition d'un groupe.
2. Dans $\mathbb{R}^2$ on définit l'opération $\oplus$ en posant $(x,y) \oplus (x',y') = (x+x', y+y')$. Montrer que $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ est un groupe.
3. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (4x+5y, 2x+3y) \end{array} \right.$.
3.a. Montrer que f est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}^2, \oplus)$ dans lui-même.
3.b. Montrer que f est injective.