

N° attribué par la bibliothèque | \_ | \_ | \_ | \_ | \_ | \_ | \_ | \_ | \_ | \_ |

## THÈSE

pour obtenir le grade de

## DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE LYON

*Discipline* : Mathématiques

présentée et soutenue publiquement par

Mylène MAÏDA

le 7 décembre 2004

---

*Titre*

### ÉTUDE ASYMPTOTIQUE DU SPECTRE DE GRANDES MATRICES ALÉATOIRES. APPLICATIONS AUX MODÈLES DE MATRICES

---

*Directrice de thèse*

Alice GUIONNET

---

*Jury*

M.	Philippe BIANE	Examineur
M.	Erwin BOLTHAUSEN	Rapporteur
Mlle	Alice GUIONNET	Directrice
M.	Cédric VILLANI	Examineur
M.	Ofer ZEITOUNI	Rapporteur
M.	Jean-Bernard ZUBER	Examineur



À ma grand-mère,  
qui m'a si bien appris l'optimisme.



# Remerciements

Ce n'est pas par simple respect du protocole mais bien parce qu'il ne fait pas de doute qu'elle est la personne à qui je dois le plus dans la réalisation de cette thèse que je commence ces remerciements en exprimant, s'il est possible, toute ma gratitude à Alice Guionnet. Tout au long de ces trois années (et même avant, pendant mon DEA), j'ai pu bénéficier de sa disponibilité, même avec un bébé dans les bras, de son indulgence, même quand je dis de très grosses bêtises, de son enthousiasme et sa conviction, même quand la situation semble désespérée, de l'acuité de ses vues mathématiques, même sur des sujets pas si familiers. Alors, merci pour tout !

Je voudrais aussi adresser un grand merci à Erwin Bolthausen et Ofer Zeitouni pour avoir accepté le travail ô combien ingrat de rapporter cette thèse. Qu'ils m'aient fait par ce biais un peu profiter de leur expertise ès grandes déviations est un grand honneur. Je tiens aussi en cette occasion à remercier Ofer pour m'avoir donné l'opportunité de passer une année au Technion, en Israël. Son charisme et sa gentillesse ne sont pas étrangers au fait que cette période ait été si enrichissante, mathématiquement mais aussi culturellement et humainement.

Peu de chercheurs ont autant de recul que Philippe Biane dans le domaine des probabilités libres, qu'il a activement contribué à rendre accessible aux probabilistes et je suis donc très flattée qu'il ait accepté de participer au jury de ma thèse. Qu'il en soit grandement remercié.

Du temps que j'étais conscrite, j'avais déjà pu apprécier la ferveur mathématique de Cédric Villani, dont il nous faisait profiter alors dans sa fonction de caïman. C'est avec très grand plaisir que j'ai retrouvé à Lyon sa silhouette familière et son incroyâable enthousiasme pour les belles mathématiques. Qu'il soit sincèrement remercié d'avoir accepté de faire partie du jury ainsi que pour les conseils pertinents qu'il a pu me donner de temps à autres.

La plupart des sujets qui sont abordés dans cette thèse sont motivés de près ou de loin par des questions que se sont posées des physiciens. Mais il est difficile de savoir en retour quel regard ils peuvent porter sur les résultats obtenus. C'est pourquoi je me réjouis que Jean-Bernard Zuber ait si gentiment accepté de faire partie du jury de cette thèse et je l'en remercie vivement.

Les mathématiques ne prennent du sens que lorsqu'on commence à les partager. Merci donc à Clément Durringer, Houman Owhadi, Katy Paroux et Vincent Vigon qui, les premiers, m'ont accordé leur confiance et invitée à venir exposer. Merci à Sandrine Péché qui a accepté de collaborer avec moi sur les problèmes de grandes déviations pour les plus grandes valeurs propres. Sa persévérance et sa détermination m'ont plusieurs fois impressionnée. Merci à Patrick Popescu-

Pampu et Nalini Anantharaman pour m'avoir fait partager un peu de leur expérience pédagogique et à Cédric Villani et Julien Michel pour la grande liberté qu'ils nous ont accordée. Merci aussi à Piotr Śniady. Lorsqu'il est venu faire un séjour à l'UMPA au printemps dernier, nous travaillions sur le contenu du chapitre 2. Je tiens à le remercier pour l'intérêt qu'il a porté à nos résultats, ses encouragements et ses remarques constructives pour la rédaction dudit chapitre.

Je ne suis pas vraiment de celles qui sont tombées dans les maths quand elles étaient petites. Je voudrais donc remercier ici tous les professeurs qui m'y ont progressivement donné goût. Parmi eux, je voudrais notamment citer M. Passaventi, l'un de mes professeurs de physique au lycée Masséna, dont le franc parler tonitruant et l'habileté au lancer de craies peuvent être considérés comme les causes lointaines de cette thèse, ainsi que Jean-François Le Gall, qui à travers son cours sur le mouvement brownien et l'encadrement de mon mémoire de maîtrise a largement contribué à éveiller ma sensibilité probabiliste.

Merci également à mes parents, pour qui ma réussite a toujours été une priorité et qui n'ont jamais épargné leurs efforts pour cela.

Un grand merci collectif à l'UMPA qui, pendant mes trois années lyonnaises, a constitué un cadre de travail stimulant par l'ouverture d'esprit mathématique de ses membres et à l'équipe Modal'X de Nanterre qui m'a accueillie cette année avec tant de chaleur.

Dans les conversations quotidiennes des thésards, les stages CIES sont le plus souvent unanimement décriés pour leur vacuité et leur inutilité. Pourtant il en est qui constituent une expérience formidable. Merci à Hervé Raynaud pour tout ce qu'il m'a appris, sur moi-même et sur les autres.

La fin de cette thèse a été fort agitée : moins de deux semaines avant la soutenance, Jamal Najim a repéré – et m'a donc signalé – une erreur importante dans la démonstration du théorème 2.1.6. Qu'il soit remercié – sans rancune ! – de sa vigilance et de sa sagacité.

Merci à Nicolas, compagnon de fortune et d'infortune des dernières semaines et à Chi qui nous a épaulés avec humour et patience pendant cette période.

Merci aussi à Hélène Schoch, Virginia Gallardo-Goncalves et Marie-Danielle Desrayaud qui m'ont épargné autant qu'elles le pouvaient bien des tracas administratifs, quand le temps me manquait.

Enfin, il me faut ajouter que sans la loufoquerie – mais aussi les conseils avisés – de Mireille, la complicité quotidienne de Tomasz, le soutien psychologique, informatique ou encore logistique de Lumi, la présence indéfectible de Lionel quand on a besoin de lui, les nourritures intellectuelles de tous ordres patiemment instillées par Yann, l'amitié solide et toujours joyeuse de Nathaëlle et Gaël, l'énergie débordante et communicative d'Eugénie, l'exceptionnelle qualité d'écoute de Ludo, le recul de Brigitte sur les petits tracas qui émaillent une thèse, le réalisme cassant de mon petit frère, la tendresse admirative de ma grand-mère, l'indulgence amusée de Cyril, François et Matthieu qui ont partagé mon bureau et courageusement supporté mon désordre et autres débordements, la fidélité du groupe qui a toujours su m'accueillir – voire me recueillir – à Paris ou ailleurs, cette thèse serait sans doute aller plus vite, mais vers un abandon prématuré bien plus sûrement que vers son achèvement.

Bref, un grand merci à tous ceux qui m'ont fait l'amitié de partager avec moi un bout de chemin, mathématique ou alpin...

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Table des matières</b>	<b>7</b>
<b>Aperçu sur le contenu et l'organisation de ce document</b>	<b>9</b>
<b>Quelques notations fréquemment utilisées</b>	<b>11</b>
<b>Introduction</b>	<b>13</b>
I.1 Intégrales matricielles et dénombrement de cartes : exemple « des graphes doublement pondérés » . . . . .	13
I.1.1 Familiarisation avec le développement en diagrammes de Feynman . . . . .	14
I.1.2 Le modèle des « graphes doublement pondérés » . . . . .	18
I.1.3 Les méthodes analytiques connues pour le calcul des intégrales matricielles . . . . .	20
I.1.4 Le développement en caractères . . . . .	23
I.1.5 Notre modèle. Résultats, conjecture et contre-exemples. . . . .	25
I.2 Du rôle des matrices aléatoires en probabilités libres : autour d'une nouvelle vision de la $R$ -transformée . . . . .	28
I.2.1 Ce que l'on sait de la place des matrices aléatoires en probabilités libres . . . . .	28
I.2.2 Une nouvelle représentation de la $R$ -transformée comme confirmation de l'importance de ce lien . . . . .	32
<b>1 Character expansion method for the first order asymptotics of a matrix integral</b>	<b>39</b>
1.1 Introduction . . . . .	39
1.2 Formulation of the matrix model as a sum over characters . . . . .	43
1.3 Large deviations estimates for the empirical distribution of Young tableaux following the distribution $\Pi^N$ . . . . .	46
1.3.1 Study of $\tilde{H}$ . . . . .	48
1.3.2 $\tilde{\Pi}^N$ is exponentially tight . . . . .	53
1.3.3 $(\tilde{\Pi}^N)_{N \geq 0}$ satisfies a weak large deviation upper bound . . . . .	54
1.3.4 $(\tilde{\Pi}^N)_{N \geq 0}$ satisfies a large deviation lower bound . . . . .	57
1.4 Laplace method for $Z_N(\Phi)(X)$ . . . . .	60
1.5 Study of the minimizers of $\mathcal{I}_\Phi$ . . . . .	62
1.6 Conclusion and remarks . . . . .	71

<b>2</b>	<b>An asymptotic log-Fourier interpretation of the <math>R</math>-transform</b>	<b>73</b>
2.1	Introduction . . . . .	73
2.1.1	General framework and statement of the results . . . . .	73
2.1.2	Preliminary properties and notations . . . . .	80
2.2	Proof of Theorems 2.1.2, 2.1.7 and related results . . . . .	83
2.2.1	Proof of Lemma 2.2.1 . . . . .	84
2.2.2	Generalisation of the method to the multi-dimensional case . . . . .	88
2.3	Central limit theorem in the case of rank one . . . . .	91
2.4	Extension of the results to the complex plane . . . . .	95
2.5	Full asymptotics in the real rank one case . . . . .	100
2.5.1	Large deviation bounds for $z_N$ . . . . .	100
2.5.2	Proofs of the lemmata . . . . .	102
2.5.3	Existence and expression of the limit . . . . .	107
2.6	Asymptotic independence and free convolution . . . . .	109
2.6.1	Concentration of measure for orthogonal matrices . . . . .	110
2.6.2	Exchanging integration with the logarithm . . . . .	112
2.7	Appendix . . . . .	116
<b>3</b>	<b>Largest eigenvalue of a Wigner matrix perturbed by a finite rank deterministic matrix</b>	<b>119</b>
3.1	Introduction . . . . .	119
3.2	The rank one case . . . . .	120
3.2.1	Large deviation principle for $x_N^*$ and its consequences . . . . .	120
3.2.2	Continuity of the spherical integrals . . . . .	123
3.2.3	Proof of the large deviation principle for the largest eigenvalue . . . . .	129
	<b>Annexe Considérations autour d'un problème ouvert : vers une généralisation de la loi circulaire</b>	<b>135</b>
A.1	La démonstration « classique » de la loi circulaire . . . . .	136
A.1.1	L'échec des techniques classiques . . . . .	136
A.1.2	Décomposition du problème ; méthode d'hermitisation . . . . .	137
A.1.3	De la convergence de l'hermitisée à celle de la mesure de Brown . . . . .	138
A.2	Entropie pour des matrices de Wishart non centrées . . . . .	141
A.2.1	Présentation du problème et contexte . . . . .	141
A.2.2	Réduction de l'entropie par $W$ -convolution libre . . . . .	143
A.3	À propos de la convergence de la mesure de Brown . . . . .	146
A.3.1	Régularisation aléatoire de la mesure de Brown . . . . .	146
A.3.2	Forme de la mesure de Brown d'éléments $R$ -diagonaux . . . . .	146
	<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>



# Aperçu sur le contenu et l'organisation de ce document

Outre une assez longue introduction qui vise à replacer nos résultats dans le contexte des modèles de matrices ou des probabilités libres, cette thèse comporte trois chapitres et une annexe.

Le chapitre 1 est une version à peine modifiée de l'article [37] "Character expansion method for the first order asymptotics of a matrix integral", écrit avec A. Guionnet et accepté pour publication dans le journal *Probability Theory and Related Fields*. Nous y étudions une variante du modèle de matrices introduit et étudié dans [51] dit « des graphes doublement pondérés » en fournissant une justification mathématique au développement en caractères dans ce cas. Cela repose sur un résultat de grandes déviations pour la mesure empirique des tableaux d'Young sous les mesures du type de celles qui apparaissent par développement en caractères, résultat qui peut constituer une première étape pour étudier d'autres modèles. À la fin du chapitre, nous donnons un autre exemple, lié au modèle de Yang-Mills, d'application de ce résultat et discutons du lien avec les problèmes physiques d'énumération de cartes.

Le chapitre suivant est une version légèrement allongée de l'article [36] "Asymptotic log-Fourier interpretation of the  $R$ -transform", écrit également en collaboration avec A. Guionnet et accepté pour publication dans *Journal of Functional Analysis* sous le titre "A Fourier view on the  $R$ -transform and related asymptotics of spherical integrals". Nous y obtenons les asymptotiques complètes de l'intégrale sphérique lorsque l'une des deux matrices diagonales est de rang 1 ainsi que la généralisation en rang supérieur quand les valeurs propres de la matrice de rang fini sont assez petites (cette hypothèse est nécessaire pour que l'intégrale sphérique en rang fini se comporte comme le produit d'intégrales sphériques en rang 1). La limite faisant intervenir la  $R$ -transformée de la mesure spectrale limite de la matrice de rang plein, nous en tirons une preuve nouvelle de l'additivité de la  $R$ -transformée par convolution libre.

Prolongement naturel du précédent, le chapitre 3 présente quelques résultats partiels qui constituent le début d'un travail en collaboration avec S. Péché. Notre motivation est d'obtenir des résultats de grandes déviations pour les plus grandes valeurs propres de  $X_N = W_N + A_N$ , où  $W_N$  est une matrice aléatoire gaussienne symétrique réelle et  $A_N$  une matrice déterministe de rang fixé. Le chapitre 3 présente un résultat de grandes déviations pour la plus grande valeur propre  $x_N^*$  de  $X_N$  dans le cas où  $A_N$  est de rang 1. On montre en particulier que si l'unique valeur propre non nulle de  $A_N$  dépasse une certaine valeur critique,  $x_N^*$  se détache du support de la loi semi-circulaire.

Enfin, l'annexe ne contient pas de résultats originaux mais j'y donne une description détaillée

et quelques pistes possibles à propos d'un problème qui m'a occupée pendant le début de ma thèse et qui reste à ma connaissance ouvert à ce jour, celui de la convergence de la mesure spectrale de matrices non hermitiennes (et non symétriques) dès lors que les entrées ne sont pas indépendantes, typiquement sous une loi de la forme  $1/z_N e^{V(\Xi_N \Xi_N^*)} d\Xi_N$ , pour un potentiel  $V$  bien choisi et  $d\Xi_N$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ . Je reviendrai en particulier dans ce chapitre sur les problèmes d'entropie libre (dans le cas notamment des matrices de Wishart) et de combinatoire des cumulants libres (en particulier dans le cas d'éléments dits  $R$ -diagonaux), qui seront évoqués dans l'introduction générale.

# Quelques notations fréquemment utilisées

- Les matrices que l'on manipule appartiennent selon les cas à  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ , l'ensemble des **matrices carrées de taille  $N \times N$  à entrées complexes**, ou au sous-espace  $\mathcal{H}_N$  de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  des **matrices hermitiennes**, ou bien au **groupe unitaire  $\mathcal{U}_N$**  ou **orthogonal  $\mathcal{O}_N$**  inclus dans  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ .

En général, la notation  $\text{tr}$  désignera la **trace** usuelle sur  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ .

On notera  $\text{diag}(x_1, \dots, x_N)$  la **matrice diagonale** de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  dont les éléments sur la diagonale sont  $x_1, \dots, x_N$ .

- On munira souvent  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  ou  $\mathcal{H}_N$  de leur **mesure de Lebesgue**, notée respectivement  $d\Xi_N$  ou  $dM$ , et les groupes compacts  $\mathcal{U}_N$  ou  $\mathcal{O}_N$  de leur **mesure de Haar**, usuellement notée  $m_N^{(\beta)}$ , avec  $\beta = 1$  dans le cas orthogonal et  $\beta = 2$  dans le cas unitaire. S'il n'y a pas d'ambiguïté dans le contexte où elle apparaît, on omettra volontiers l'exposant  $\beta$ .

Il arrivera bien souvent, qu'à partir de la mesure de Lebesgue  $dM$  sur  $\mathcal{H}_N$ , on construise la **mesure gaussienne** donnée par  $1/Z_N e^{-N \text{tr} M^2} dM$ , avec  $Z_N = \int_{\mathcal{H}_N} e^{-N \text{tr} M^2} dM$ .

Une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathcal{H}_N$  suivant cette loi sera alors désignée sous le nom de **matrice gaussienne hermitienne** ou encore **matrice de Wigner**. On pourra dire aussi que la matrice aléatoire considérée **appartient au GUE**<sup>a</sup> (Gaussian Unitary Ensemble).

- Pour  $M$  une matrice dans  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ , de valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ , on notera en général  $\hat{\mu}_M := 1/N \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}$  la **mesure spectrale empirique** de  $M$ . S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la suite de matrices considérées, on indexera plus volontiers par leur dimension, en notant alors  $\hat{\mu}_N$ .

Si on ne suppose pas  $M$  hermitienne ou symétrique, les valeurs propres sont complexes et on appellera parfois  $\hat{\mu}_M$  la **mesure de Brown** de  $M$ . De manière plus générale, si  $x$  est un élément d'un espace de probabilités libres  $(\mathcal{A}, \varphi)$ , la mesure de Brown de  $x$  est définie par  $\mu_x := \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \right) \log \Delta(x - (a + ib))$ , où  $\Delta(x) = \exp(\varphi \log |x|)$ , avec  $|x| = (xx^*)^{1/2}$ , est le déterminant de Kadison-Fuglede de  $x$ .

- À propos de la définition précédente, il nous faut préciser que, lorsqu'on traitera de probabilités libres, on notera  $(\mathcal{A}, \varphi)$  l'**espace de probabilités libres** dans lequel on travaille, où  $\mathcal{A}$  est une  $C^*$ -algèbre et  $\varphi$  un état tracial.

- On notera  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$  l'**ensemble des mesures de probabilités** à support respectivement dans  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^+$ . Ces espaces seront le plus souvent munis de la **topologie de la convergence**

---

<sup>a</sup>La notation GOE, pour « Gaussian Orthogonal Ensemble », est réservée au cas symétrique réel.

**faible** : on dira qu'une famille de mesures de probabilités  $(\mu_N)_{N \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\mu$ , et on notera simplement  $\mu_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mu$ , si, pour toute fonction  $f$  continue bornée sur  $\mathbb{R}$ ,  $\int f d\mu_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \int f d\mu$ .

Cette topologie est métrisable et on utilisera presque systématiquement sur ces espaces la **distance de Dudley**, notée  $d$  et définie par

$$d(\mu, \nu) := \sup \left\{ \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right| ; \|f\|_\infty \leq 1 \text{ et } \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 1 \right\}.$$

• Les résultats démontrés dans cette thèse appartiennent pour la plupart à la catégorie des **principes de grandes déviations** (expression parfois abrégée en **PGD**<sup>b</sup>).

Si  $(E, \mathcal{E})$  est un espace métrique muni d'une topologie qui contient la tribu borélienne  $\mathcal{B}(E)$ ,  $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  une famille de mesures de probabilités sur  $E$  et  $I$  une **fonction de taux**, c'est-à-dire une application  $I : E \rightarrow [0, \infty]$ , semi-continue inférieurement, on dit que la famille  $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  satisfait un **PGD** de fonction de taux  $I$  dans l'échelle  $1/\varepsilon$  si

$$\forall G \text{ ouvert, } \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(G) \geq - \inf_{x \in G} I(x), \quad (\text{N.1})$$

$$\forall F \text{ fermé, } \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \mu_\varepsilon(G) \leq - \inf_{x \in F} I(x). \quad (\text{N.2})$$

Des inégalités de la forme (N.1) ou (N.2) seront appelées respectivement **borne inférieure** et **borne supérieure de grandes déviations**.

Les fonctions de taux impliquées seront souvent **bonnes**, dans le sens où leurs ensembles de niveaux seront non seulement fermés (elles sont semi-continues inférieurement) mais aussi compacts.

Dans le cas où la famille  $(\mu_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  vérifie un PGD, l'analyse asymptotique de quantités comme  $\int e^{\frac{\varphi(x)}{\varepsilon}} d\mu_\varepsilon(x)$  avec  $\varphi$  continue bornée, traitées usuellement par un procédé appelé « méthode de Laplace », se fera grâce au **lemme de Varadhan**, qui en est la traduction dans ce contexte (cf Théorème 4.3.1 de l'ouvrage [21]).

• Ces PGD seront souvent établis pour la loi de certaines mesures spectrales « sous une mesure de Gibbs » associée à un modèle.

Si on considère l'intégrale matricielle

$$Z_N(P, \varphi) := Z_N(P, \varphi, A_{n+1}, \dots, A_{n+p}) := \int e^{N^2(N^{-1} \text{tr})^{\otimes m}(P(\varphi_1(A_1), \dots, \varphi_{n+p}(A_{n+p})))} dA_1 \dots dA_n,$$

où  $P$  est un élément de  $\mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_{n+p} \rangle^{\otimes m}$ , avec  $\mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_{n+p} \rangle$  l'ensemble des polynômes non commutatifs en  $n+p$  variables et les  $\varphi_i$  sont des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$ , alors la **mesure de Gibbs associée à  $Z_N(P, \varphi)$**  est la mesure de probabilité  $\mu_N^{(P, \varphi)}$  sur  $\mathcal{P}(\mathbb{R})^n$  telle que pour tous  $B_1, \dots, B_n \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ,  $\mu_N^{(P, \varphi)}(B_1 \times \dots \times B_n) = Z_N(P, \varphi)(B_1 \times \dots \times B_n) / Z_N(P, \varphi)$ , où

$$Z_N(P, \varphi)(B_1 \times \dots \times B_n) := \int 1_{\hat{\mu}_{A_1} \in B_1} \dots 1_{\hat{\mu}_{A_n} \in B_n} e^{N^2(N^{-1} \text{tr})^{\otimes m}(P(\varphi_1(A_1), \dots, \varphi_{n+p}(A_{n+p})))} dA_1 \dots dA_n.$$

<sup>b</sup>ou **LDP** dans les chapitres rédigés en anglais.

# Introduction

L'idée directrice de cette thèse est d'utiliser des techniques de grandes déviations pour étudier les asymptotiques de certaines intégrales matricielles — dites aussi « modèles de matrices » — et de leur mesure de Gibbs associée, soit pour l'intérêt propre de ces asymptotiques (comme dans les chapitres 1 et 2), soit en vue d'applications, par exemple à l'étude du comportement de la plus grande valeur propre dans le cas où on perturbe une matrice gaussienne par une matrice de faible rang (comme dans le chapitre 3) ou de celui de la mesure spectrale dans le cas de matrices non hermitiennes (c'est l'objet de l'annexe).

Depuis leur apparition, en statistique dans les années 30 et en physique nucléaire dans les années 50, les matrices aléatoires et les intégrales matricielles associées se sont révélées être à la croisée de nombreux chemins mathématiques, de la théorie des nombres à la mécanique quantique, des mathématiques financières à la combinatoire des cartes planaires, des probabilités libres au chaos quantique.

L'objet de cette introduction n'est bien sûr pas de donner une description exhaustive de tous ces sujets (pour assouvir sa curiosité, le lecteur interpellé par la liste ci-dessus pourra par exemple consulter l'article de revue [35] et les nombreuses références qui s'y trouvent) mais de développer un peu en détail deux d'entre eux qui ont été centraux dans le type de problèmes auxquels nous nous sommes intéressées et les résultats que nous allons présenter ci-après, principalement dans les chapitres 1 et 2.

Ces deux domaines sont d'une part le lien entre modèles de matrices et dénombrement de cartes sur des surfaces et d'autre part la place des matrices aléatoires en probabilités libres.

## I.1 Intégrales matricielles et dénombrement de cartes : exemple « des graphes doublement pondérés »

Le premier de ces deux domaines a suscité une abondante littérature physique et a été la source de notre intérêt pour le modèle dit « des graphes doublement pondérés » dont nous présenterons l'étude dans le chapitre 1.

En un mot, nous obtenons la convergence, dans les asymptotiques prévues par les physiciens, d'une intégrale matricielle qui est une variante de la fonction de partition de ce modèle (Théorème I.1.7).

### I.1.1 Familiarisation avec le développement en diagrammes de Feynman

Avant de présenter ce modèle proprement dit et pour mieux comprendre sa signification, il nous semble important d'expliciter le lien qui existe de manière générale entre intégrales matricielles et dénombrement de cartes dessinées sur des surfaces. Pour cette entrée en matière, nous nous appuyons essentiellement sur l'excellente introduction d'A. Zvonkin [84] qui, avec beaucoup d'habileté, est parvenu à exposer les idées de développement en diagrammes de Feynman en termes compréhensibles par la communauté mathématique.

Vers la fin des années 70, les physiciens qui travaillent en gravité ou chromodynamique quantiques ou encore en théorie des cordes cherchent à résoudre des questions telles que :

« Combien existe-t-il, à homéomorphisme près, de cartes avec 4 sommets et 5 arêtes dessinées sur une surface compacte orientable de genre 2 ? »

Je ne m'étendrai pas ici sur les motivations profondes des physiciens à se poser de telles questions, à la fois parce que ma compréhension de ces domaines de la physique théorique est loin de me permettre d'en avoir une vue d'ensemble pertinente et parce que la question n'a sans doute que peu besoin de son contexte physique pour paraître intéressante aux yeux des mathématiciens. En admettant donc que la question soit légitime, le lecteur ne manquera pas de se demander quel peut bien être le lien entre ces problèmes géométrico-combinatoires et une quelconque intégrale matricielle !

• Pour l'illustrer, je vais d'abord développer l'un des exemples les plus simples, celui du moment d'ordre  $2k$  d'une matrice gaussienne hermitienne. Celui-ci s'exprime sous la forme de l'intégrale :

$$M_N^{(2k)} := \frac{1}{Z_N} \int_{\mathcal{H}_N} \text{tr} H^{2k} e^{-\frac{1}{2} \text{tr} H^2} dH, \quad (\text{I.3})$$

où  $\text{tr}$  désigne la trace usuelle dans  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ ,  $\mathcal{H}_N$  l'ensemble des matrices hermitiennes de taille  $N$  et  $dH$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{H}_N$  donnée par

$$dH = \prod_{i=1}^N dx_{ii} \prod_{i < j} dx_{ij} dy_{ij},$$

où, si  $H := (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$ , les coordonnées  $(x_{ij}, y_{ij})_{1 \leq i < j \leq N}$  sont définies par  $x_{ii} = h_{ii}$  et, si  $i < j$ ,  $x_{ij} = \text{Re}(h_{ij})$  et  $y_{ij} = \text{Im}(h_{ij})$ ; enfin  $Z_N$  est une constante de normalisation choisie de sorte que  $d\mu(H) := 1/Z_N e^{-\frac{1}{2} \text{tr} H^2} dH$  soit une mesure de probabilité.

Comme  $H \mapsto \text{tr} H^2$  est une forme quadratique non dégénérée sur  $\mathcal{H}_N \sim \mathbb{R}^{N^2}$ , la mesure  $\mu$  que nous venons d'introduire est une mesure gaussienne et  $M_N^{(2k)} = \mathbb{E}[\text{tr}(H^{2k})]$ , où  $\mathbb{E}$  désigne l'espérance sous la mesure  $\mu$ . Le calcul de  $M_N^{(2k)}$  peut alors être effectué facilement grâce à un résultat connu sous le nom de « formule de Wick » :

**Théorème I.1.1** *Si  $\langle \cdot \rangle$  désigne l'espérance sous une mesure gaussienne sur un espace de dimension finie et si  $f_1, \dots, f_{2k}$  sont des formes linéaires sur cet espace, alors on a*

$$\langle f_1 \cdots f_{2k} \rangle = \sum \langle f_{p_1} f_{q_1} \rangle \cdots \langle f_{p_k} f_{q_k} \rangle,$$

où on somme sur toutes les permutations de  $\{1, \dots, 2k\}$  telles que  $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$  et  $p_1 < q_1, \dots, p_k < q_k$ .

Une telle permutation est appelée un couplage de Wick.

En clair, ce théorème affirme qu'on peut calculer n'importe quel moment d'ordre pair<sup>c</sup> de variables gaussiennes si on en connaît les moments d'ordre 2 et il fournit une formule explicite pour ce faire.

Dans notre exemple, par linéarité de l'espérance, on a

$$M_N^{(2k)} = \mathbb{E}[\text{tr}(H^{2k})] = \sum_{i_1, \dots, i_{2k}=1}^N \mathbb{E}[h_{i_1 i_2} h_{i_2 i_3} \cdots h_{i_{2k} i_1}]. \tag{I.4}$$

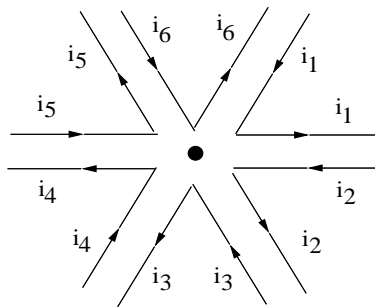
Comme, pour tout couple  $(i, j)$ ,  $h_{ij}$  est bien une fonction linéaire des coordonnées  $(x_{ij}, y_{ij})$ , il nous suffit donc de calculer les moments d'ordre 2 correspondants. On voit facilement que

$$\mathbb{E}[h_{ij} h_{kl}] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = l \text{ et } j = k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

de sorte que les termes de la forme  $\mathbb{E}[h_{i_1 i_2} h_{i_2 i_3} \cdots h_{i_{2k} i_1}]$  sont « très souvent » nuls ; la question est de savoir à quelles conditions sur les indices  $i_j$  leur contribution est non nulle.

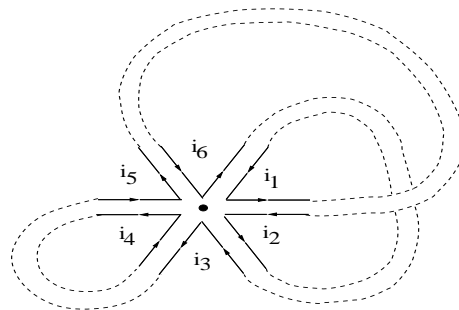
Pour y voir plus clair, on adopte la représentation suivante :  $\text{tr}(H^{2k})$  est représenté par une étoile ; autour d'un sommet rayonnent  $2k$  arêtes doubles orientées de manière cohérente et chaque arête porte un indice  $i_1, i_2 \dots$  jusqu'à  $i_{2k}$ .

Par exemple, pour  $k = 3$ , on obtient la figure suivante :



Réaliser un couplage de Wick va consister à apparier les doubles lignes deux par deux avec la convention que l'indice reste constant le long d'une même ligne.

Par exemple, sur la figure ci-après,

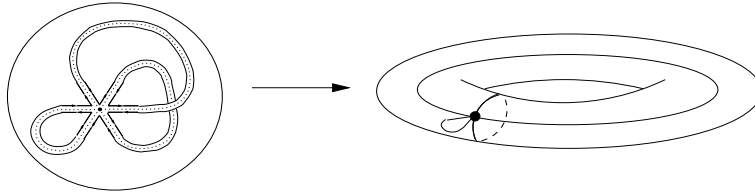


on a imposé les égalités :  $i_1 = i_6 = i_3 = i_5 = i_2$ .

<sup>c</sup>Les moments d'ordre impair étant bien sûr nuls dès que les variables aléatoires mises en jeu sont centrées.

**Remarque I.1.2** C'est la collection des « graphes épais » de ce type obtenus en faisant tous les appariements possibles qu'on appelle « développement en diagrammes de Feynman » de l'intégrale  $M_N^{(2k)}$ .

En écrasant les arêtes doubles sur leur ligne médiane, on fait apparaître des faces et si on complète par une face externe, on voit que le graphe précédent donne naissance à une carte<sup>d</sup> d'une surface, en l'occurrence un tore, comme l'illustre la figure suivante :



Revenons à notre calcul de moment (I.4) : chacun des indices  $i_j$  pouvant varier de 1 à  $N$ , la contribution de la carte que nous venons de dessiner est  $N^2$  car il y a en tout 2 indices libres. De manière générale, les graphes que l'on obtient dans le développement de  $M_N^{(2k)}$  ont toujours un sommet et  $k$  arêtes (puisque les  $2k$  branches de l'étoile sont appariées deux par deux). Par les propriétés de la caractéristique d'Euler, le nombre de faces (donc le nombre d'indices libres) du graphe est  $F = k + 1 - 2g$ , où  $g$  est le genre de la surface dont notre graphe constitue une carte. On a donc finalement le résultat suivant :

**Théorème I.1.3** Si  $M_N^{(2k)}$  est le moment d'ordre  $2k$  d'une matrice gaussienne hermitienne défini par (I.3), on a

$$M_N^{(2k)} = \sum_{g=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \varepsilon_g(k) N^{k+1-2g} = N^{k+1} \sum_{g=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \varepsilon_g(k) \left( \frac{1}{N^2} \right)^g,$$

où  $\varepsilon_g(k)$  est le nombre de cartes (étiquetées) à un sommet et  $k$  arêtes d'une surface de genre  $g$ .

Ce théorème signifie que l'intégrale matricielle  $M_N^{(2k)}$  peut être vue comme une fonction génératrice pour les  $\varepsilon_g(k)$  qui sont du type des objets qui nous intéressaient à l'origine. Nous verrons un peu plus loin que ce point de vue prend tout son sens parce qu'on dispose de méthodes analytiques pour le calcul de cette intégrale — tout au moins de ses asymptotiques quand  $N$  devient grand.

• Mais les intégrales matricielles que l'on désigne habituellement sous l'appellation « modèles de matrices » sont de la forme :

$$Z_N(P, \varphi) := Z_N(P, \varphi, A_{n+1}, \dots, A_{n+p}) := \int e^{N^2(N^{-1} \text{tr})^{\otimes m}(P(\varphi_1(A_1), \dots, \varphi_{n+p}(A_{n+p})))} dA_1 \dots dA_n,$$

où  $dA_i$  est la mesure de Lebesgue sur un espace de matrices  $\mathcal{E}_N$  inclus dans  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ ,  $P$  un élément de  $\mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_{n+p} \rangle^{\otimes m}$ , où  $\mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_{n+p} \rangle$  est l'ensemble des polynômes non commutatifs en  $n+p$

<sup>d</sup>On appelle *carte* tout graphe plongé dans une surface compacte orientable de sorte que les arêtes ne s'intersectent pas et que si on découpe la surface le long des arêtes, on obtienne une union disjointe d'ensembles chacun homéomorphe à un disque ouvert (que l'on appelle les faces).



variables et les  $\varphi_i$  sont des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^e$ .

Par exemple, l'un des premiers modèles ayant un intérêt physique qui ont été étudiés est le cas  $n = 1, p = 0, m = 1$  et  $P = -X^2 - tX^4$ , c'est-à-dire

$$Z(t, N) = \mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{t}{N} \operatorname{tr} H^4\right)\right),$$

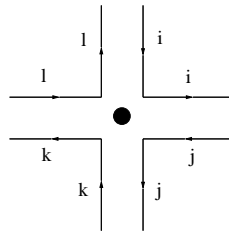
où  $\mathbb{E}$  est encore l'espérance sous la mesure gaussienne sur  $\mathcal{H}_N$  introduite précédemment et  $t$  est un réel positif.

La première étape est de développer l'exponentielle en série

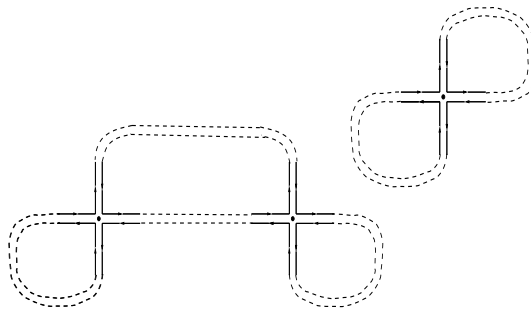
$$\exp\left(-\frac{t}{N} \operatorname{tr} H^4\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \left(-\frac{t}{N}\right)^n (\operatorname{tr} H^4)^n,$$

de sorte qu'on est amené à étudier des quantités du type  $\mathbb{E}[(\operatorname{tr} H^4)^n]$ .

Comme précédemment, pour développer cette espérance en diagrammes de Feynman, on représente  $\operatorname{tr} H^4 = \sum_{i,j,k,l=1}^N h_{ij}h_{jk}h_{kl}h_{li}$  par un sommet au centre d'un « carrefour » comme ci-dessous :



La quantité  $(\operatorname{tr} H^4)^n$  est alors représentée par  $n$  sommets de ce type et, d'après le théorème de Wick I.1.1, toute contribution non nulle à  $\mathbb{E}[(\operatorname{tr} H^4)^n]$  correspond à un appariement cohérent des doubles flèches, par exemple comme ci-après :



Notons qu'il n'y a aucune raison pour que les graphes obtenus soient connexes, ce qui pose un problème pour les voir comme des cartes dessinées sur une surface. Heureusement, il est un fait bien connu en combinatoire que nous allons utiliser pour y remédier : si on a une fonction génératrice pour une classe d'objets étiquetés, alors son logarithme est la fonction génératrice pour les objets *connexes* ayant les mêmes propriétés.

On obtient le théorème suivant :

---

<sup>e</sup>On suppose que les matrices de  $\mathcal{E}_N$  sont diagonalisables de sorte que si  $A = P \operatorname{diag}(a_1, \dots, a_N)P^{-1}$ , on définit  $\varphi_i(A) := P \operatorname{diag}(\varphi_i(a_1), \dots, \varphi_i(a_N))P^{-1}$ .

**Théorème I.1.4** Si  $E(t, N) := \frac{1}{N^2} \log Z(t, N) = \frac{1}{N^2} \log \mathbb{E} \left( \exp \left( -\frac{t}{N} \operatorname{tr} H^4 \right) \right)$ ,  
alors

$$E(t, N) = \sum_{g \geq 0} \left( \frac{1}{N^2} \right)^g \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \left( -\frac{t}{N} \right)^n K_g(n),$$

avec  $K_g(n)$  le nombre de diagrammes étiquetés<sup>f</sup> connexes avec  $n$  sommets tous de degré 4 qui sont des cartes d'une surface de genre  $g$ .

• Comme le lecteur l'aura compris, on peut faire varier quasiment à l'infini les contraintes sur les graphes que l'on veut dénombrer en jouant sur la fonction que l'on intègre (ainsi  $\operatorname{tr}(H^{2k})$  imposait des graphes à un seul sommet et  $k$  arêtes tandis que  $\exp \left( -\frac{t}{N} \operatorname{tr} H^4 \right)$  permettait de sélectionner ceux dont tous les sommets sont d'ordre 4 etc.)

En outre, si les modèles à une matrice permettent de dénombrer des réseaux aléatoires ayant certaines caractéristiques, en faisant intervenir plusieurs matrices, on peut obtenir des modèles dans lesquels certains objets « vivent » sur ces réseaux aléatoires. Le modèle de ce type le plus connu est sans doute le modèle d'Ising sur triangulation aléatoire (cf. par exemple [24]). Il est donné par l'intégrale à deux matrices suivante :

$$Z_I := \int_{\mathcal{H}_N \times \mathcal{H}_N} dM_1 dM_2 e^{-N \operatorname{tr} \left[ \frac{g_1}{3} M_1^3 + \frac{g_2}{3} M_2^3 + \frac{1}{2} M_1^2 + \frac{1}{2} M_2^2 - c M_1 M_2 \right]}.$$

Les diagrammes de Feynman pour ce modèle sont composés de sommets trivalents de deux types



chacun portant une couleur correspondant à un spin  $+1$  ou  $-1$ . La valeur de l'espérance correspondant à un diagramme composé de tels sommets dépend des appariements entre branches de même couleur ou de couleurs différentes de même que l'énergie dans le modèle d'Ising dépend des interactions entre spins voisins.

### I.1.2 Le modèle des « graphes doublement pondérés »

Après ce petit aperçu des différents types d'intégrales matricielles et des modèles auxquels elles peuvent correspondre, présentons maintenant un modèle qui a été, sous une forme légèrement modifiée, l'objet de l'étude que nous détaillerons dans le chapitre 1. Pour ce modèle, nous avons pu en particulier justifier mathématiquement la méthode de développement en caractères que nous introduirons plus bas dans le paragraphe I.1.4.

Dans le paragraphe précédent, nous avons vu un modèle qui permettait d'énumérer les quadrangulations (c'est-à-dire les graphes n'ayant que des sommets de degré 4) ; ici, dans le modèle introduit et étudié dans [51], on impose des contraintes à la fois sur les sommets et sur les faces (qui sont les sommets dans le graphe dual d'où le nom de « dually weighted graphs model », que

<sup>f</sup>Les sommets sont numérotés de 1 à  $N$  et on met un ordre cyclique sur les 4 arêtes incidentes à chacun d'eux.

nous avons maladroitement tenté de traduire par « graphes doublement pondérés »). L'intégrale matricielle correspondante s'écrit

$$Z_N^{dwg} := Z_N^{dwg}(A_N, B_N) := \int_{\mathcal{H}_N} dM e^{-\frac{N}{2} \text{tr} M^2 - \text{tr} \otimes \text{tr} \log(I \otimes I - B_N \otimes M \cdot A_N)}, \tag{I.5}$$

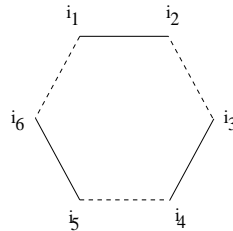
où  $dM$  est comme d'habitude la mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{H}_N$  et  $A_N$  et  $B_N$  des matrices de taille  $N$  fixées. On peut montrer que  $Z_N^{dwg}$  se réexprime sous la forme

$$Z_N^{dwg} = \sum_G \prod_q t_q^{v_q} (t_q^*)^{v_q^*}, \tag{I.6}$$

où  $G$  est un graphe,  $v_q$  le nombre de sommets de degré  $q$  et  $v_q^*$  le nombre de faces à  $q$  arêtes de  $G$ . Les poids  $t_q$  et  $t_q^*$  s'expriment en fonction des matrices  $A$  et  $B$  (on omet l'indice  $N$ ) du modèle par :

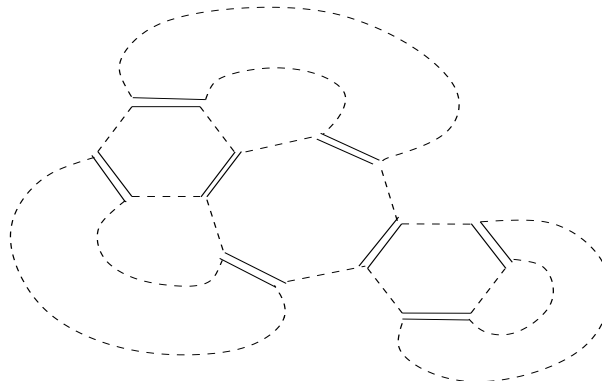
$$t_q = \frac{1}{q} \frac{1}{N} \text{tr} B^q \quad \text{et} \quad t_q^* = \frac{1}{q} \frac{1}{N} \text{tr} A^q. \tag{I.7}$$

Pour se convaincre de l'équivalence des deux expressions, on effectue le développement en diagrammes de Feynman du modèle (I.5) mais en employant une représentation un peu différente de celle que nous avons utilisée dans le paragraphe I.1.1. Lorsqu'on développe l'exponentielle en série, on obtient des espérances du type  $\text{tr} B^{k_1} \dots \text{tr} B^{k_n} \mathbb{E}[\text{tr}[(MA)^{k_1}] \dots \text{tr}[(MA)^{k_n}]]$ . Chacune des  $\text{tr}[(MA)^{k_j}]$  sera représentée, non pas par une étoile comme nous l'avons fait jusqu'ici mais — de façon duale, pourrait-on dire — par un polygone ayant  $2k_j$  arêtes alternativement pleines (correspondant à  $M$ ) et pointillées (correspondant à  $A$ ). Ainsi par exemple l'hexagone

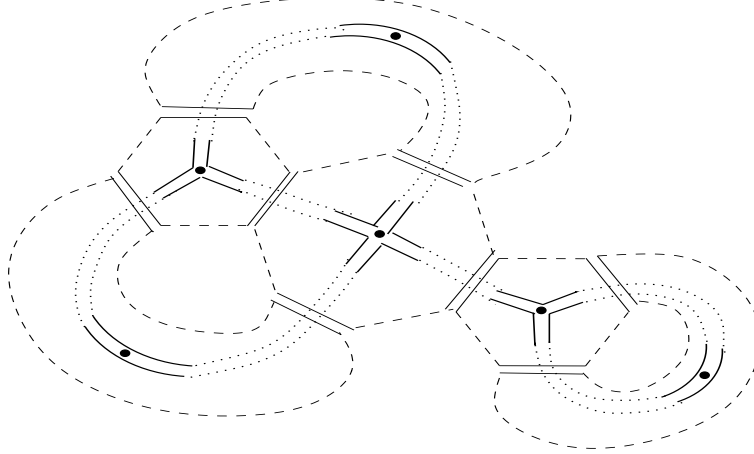


représente le produit  $M_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} M_{i_3 i_4} A_{i_4 i_5} M_{i_5 i_6} A_{i_6 i_1}$ , qui provient de  $\text{tr}(MA)^3$ .

Si on veut avoir une contribution non nulle à l'espérance  $\mathbb{E}[\text{tr}[(MA)^{k_1}] \dots \text{tr}[(MA)^{k_n}]]$ , par le théorème de Wick nous savons qu'il faut que chaque segment plein soit apparié avec un autre du même type, par exemple de la façon suivante



Pour représenter les contributions de  $B$  dans le produit  $\text{tr } B^{k_1} \cdots \text{tr } B^{k_n} \mathbb{E}[\text{tr}[(MA)^{k_1}] \cdots \text{tr}[(MA)^{k_n}]]$ , on dessine alors le graphe dual en plaçant un sommet (étoilé) d'ordre  $k_j$  à l'intérieur de chaque polygone de l'objet précédent puis on relie ces sommets par des doubles lignes qui traversent les appariements de segments pleins (cette contrainte impose en particulier l'égalité des puissances  $k_j$  de  $MA$  et de  $B$ ). Ceci donne la figure suivante :



On vérifie alors que la contribution est bien celle attendue au vu des équations (I.6) et (I.7), par exemple ici  $(\text{tr } B^3)^2 \cdot \text{tr } B^4 \cdot (\text{tr } B^2)^3 \cdot (\text{tr } A^3)^2 \cdot \text{tr } A^2 \cdot \text{tr } A^8$ , où les puissances respectives de  $A$  et  $B$  correspondent donc aux valences respectives des faces et des sommets du graphe obtenu.

### I.1.3 Les méthodes analytiques connues pour le calcul des intégrales matricielles

Comme nous l'avons évoqué plus haut, le fait de disposer d'une correspondance entre dénombrements de cartes et intégrales matricielles ne prend tout son sens que dans la mesure où l'on dispose de moyens autres que géométriques pour calculer ces intégrales. Dans ce paragraphe, nous allons nous efforcer de donner un aperçu de ces méthodes, qui nous permettra de faire un rapide résumé de ce que l'on sait sur la convergence des modèles de matrices et de se convaincre de la pertinence de l'utilisation de la méthode de développement en caractères, qui apparaîtra dans le paragraphe I.1.4. En particulier, nous allons voir que l'on peut un peu grossièrement résumer l'état de l'art en la matière en plagiant une formule bien connue : « *Une matrice, ça va ! Plusieurs matrices, ... ! ?* » .

#### Asymptotiques des modèles à une matrice

La forme générale d'un modèle à une matrice est, disons dans le cas hermitien,

$$Z_N^V := \int_{\mathcal{H}_N} e^{-N \text{tr } V(M)} dM,$$

où  $V$  est une fonction continue qui croît suffisamment vite à l'infini pour assurer la convergence de l'intégrale.

Puisque  $\text{tr } V(M)$  est une fonction des valeurs propres de  $M$ , elle est donc invariante par conjugaison unitaire. On opère alors le changement de variable  $M \mapsto (U, \Lambda)$  où  $M = U \Lambda U^*$ , avec  $\Lambda := \text{diag}(M_1, \dots, M_N)$  où les  $M_i$  sont les valeurs propres de  $M$  et  $U$  unitaire, qui est univoque au signe près si on ordonne les valeurs propres  $M_i$ . On peut montrer (cf. le chapitre 3 de [59]) que le

le jacobien de cette transformation est donné par le carré du déterminant de Vandermonde de  $\Lambda$ , de sorte que

$$Z_N^V = c_N \int_{\mathbb{R}^N} e^{-N \sum_{i=1}^N V(M_i)} \Delta(\Lambda)^2 dM_1 \cdots dM_N,$$

où  $\Delta(\Lambda) = \prod_{i < j} |M_i - M_j|$  et  $c_N$  est le volume du groupe unitaire.

La convergence et le calcul de  $Z_N^V$  peuvent alors être abordés essentiellement de deux manières différentes.

- La première stratégie possible est d'établir un principe de grandes déviations pour la loi jointe des valeurs propres de  $M$  sous une mesure bien choisie, comme celui établi dans l'article [8], que nous rappelons ici :

**Théorème I.1.5** *Sous la probabilité*

$$\mathcal{Q}_N := \frac{1}{Z_N} \prod_{1 \leq i < j \leq N} |M_i - M_j|^2 \exp\left\{-\frac{N}{2} \sum_{i=1}^N M_i^2\right\} \prod_{i=1}^N dM_i,$$

la loi de la mesure spectrale  $\hat{\mu}^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{M_i}$  vérifie un principe de grandes déviations dans l'échelle  $N^2$  de bonne fonction de taux  $I_1$  donnée par

$$I_1(\mu) := \frac{1}{2} \int x^2 d\mu(x) - \iint \log|x - y| d\mu(x) d\mu(y) - \frac{3}{2}.$$

Ce résultat traite du cas gaussien  $V(x) = x^2$  mais la convergence quand  $N$  tend vers l'infini de  $1/N^2 \log Z_N^V$  ainsi qu'une formule variationnelle pour la limite peuvent ensuite être obtenues, sous des hypothèses bien plus générales sur  $V$ , par application directe du lemme de Varadhan (cf. Théorème 5.2 dans [8]).

- Mais si l'on se souvient de ce que l'on a obtenu par exemple dans les théorèmes I.1.3 et I.1.4, la limite quand  $N$  tend vers l'infini de  $1/N^2 \log Z_N^V$  ne fait intervenir que les contributions des cartes planaires (c'est-à-dire que l'on peut dessiner sur une surface de genre 0) dans le développement en diagrammes de Feynman de  $Z_N^V$ . Si l'on veut connaître les autres termes de ce développement, il nous faut étudier plus finement le comportement asymptotique de la fonction de partition  $Z_N^V$ . Pour cela, la méthode qui s'est révélée la plus efficace est celle des polynômes orthogonaux. En effet, si on réécrit

$$\Delta(\Lambda) := \begin{vmatrix} M_1^{N-1} & \cdots & M_N^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_{N-1}(M_1) & \cdots & p_{N-1}(M_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ p_0(M_1) & \cdots & p_0(M_N) \end{vmatrix},$$

avec  $(p_0, \dots, p_{N-1})$  la famille de polynômes orthogonaux pour la mesure  $e^{-V(x)} dx$ , la question du développement asymptotique de  $Z_N^V$  se ramène à des questions d'asymptotique fine pour ces polynômes, qui peuvent être résolues en les considérant comme solutions de certains problèmes de Riemann-Hilbert (cf. par exemple [20] pour une définition).

Cette vision a permis d'obtenir de nombreux résultats, exposés de façon très pédagogique dans l'ouvrage [20], à la fois sur la question de l'universalité de l'espacement entre les valeurs propres (cf.

[19]) et sur celle du comportement de  $Z_N^V$ . Cette approche a été récemment couronnée de succès par l'obtention par N. Ercolani et K. McLaughlin [23] du développement complet de  $Z_N^V$  en puissances de  $1/N^2$  sous des hypothèses très générales sur le potentiel  $V$ , ce qui, d'un certain point de vue, clôt le débat sur les asymptotiques des modèles à une matrice.

### Le cas des modèles à plusieurs matrices

Cependant, dès que l'on s'écarte du cas  $n = 1, p = 0$ , c'est-à-dire dès qu'au moins deux matrices interviennent dans l'intégrale, ces stratégies s'écroulent d'emblée puisque la trace d'une fonction des matrices en question ne s'exprime bien sûr plus en fonction de leurs seules valeurs propres mais aussi des angles entre les vecteurs propres. Rares sont alors les modèles pour lesquels on dispose de résultats rigoureux. Ils sont même tous du type dit « à interaction AB », c'est-à-dire qu'ils s'expriment sous la forme

$$Z_N(P_1, \dots, P_{q+p}) := \int e^{N(\sum_{i=1}^{q+p} \text{tr} P_i(A_i) + \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}} c_{ij} \text{tr}(A_i A_j))} dA_1 \dots dA_q,$$

où les  $c_{ij}$  sont des réels et  $\mathcal{J}$  est un sous-ensemble de  $\{1, \dots, q+p\}^2$  dont le graphe d'adjacence ne contient pas de boucles.

Certains travaux de Mehta (notamment [58]), basés sur des équations de diffusion pour les valeurs propres et des raffinements de la méthode des polynômes orthogonaux, permettent de trouver les asymptotiques de  $Z_N(P_1, \dots, P_{q+p})$  dans le cas où  $q$  est égal à 2 et  $p$  à 0 et où les deux matrices jouent des rôles symétriques (autrement dit,  $P_1 = P_2$ ) mais nous avons choisi de détailler ici une autre stratégie plus générale, adoptée dans l'article [38] puis appliquée dans [34].

La première étape consiste à étudier en soi la partie interaction c'est-à-dire l'intégrale sphérique

$$I_N(A_N, B_N) = \int e^{N \text{tr}(A_N U B_N U^*)} dm_N(U),$$

où  $m_N$  est la mesure de Haar sur  $\mathcal{U}_N$  dans le cas hermitien (ou sur  $\mathcal{O}_N$  dans le cas symétrique) et  $A_N$  et  $B_N$  deux matrices diagonales réelles fixées.

Dans la référence [38], les auteurs s'appuient sur le fait que la convergence de  $I_N$  peut se déduire d'un principe de grandes déviations (PGD) pour la loi de la mesure spectrale d'une matrice gaussienne hermitienne *non centrée*. Pour obtenir ce PGD, ils utilisent une approche dynamique (précédemment introduite dans [14]) en considérant la matrice qu'ils veulent étudier comme la valeur au temps 1 du processus  $Y_N(t) = A_N + H_N(t)$ , où  $H_N(t)$  est un mouvement brownien hermitien, c'est-à-dire une matrice hermitienne à entrées browniennes indépendantes. Ils disposent alors, pour obtenir les déviations recherchées, de tout l'arsenal du calcul d'Itô et des propriétés de martingales pour des fonctions bien choisies du processus  $(Y_N(t))_{t \geq 0}$ . Il serait trop long de détailler plus avant leur stratégie mais mentionnons le théorème qu'ils obtiennent, auquel nous ferons maintes fois référence dans les chapitres 1 et 2 :

**Théorème I.1.6** *On suppose que le support de la mesure spectrale des matrices  $A_N$  et le moment d'ordre 2 de celle des  $B_N$  sont bornés uniformément en  $N$ . Si ces mesures spectrales convergent faiblement respectivement vers  $\mu_A$  et  $\mu_B$  alors*

$$\begin{aligned} I(\mu_A, \mu_B) &:= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log I_N(A_N, B_N) \\ &= -J(\mu_A, \mu_B) + I_1(\mu_B) + \frac{1}{2} \int x^2 d\mu_A(x), \end{aligned}$$

où la fonction  $I_1$  a été définie dans l'énoncé du théorème I.1.5 et  $J(\mu_A, \cdot)$  est la fonction de taux des déviations de la mesure spectrale du processus  $(Y_N(t))_{t \geq 0}$ .

Une fois cette première étape de contrôle de l'intégrale sphérique franchie, on peut obtenir relativement aisément (modulo un bon contrôle exponentiel des fonctions à intégrer) la convergence de plusieurs modèles de matrices à interaction de type AB en appliquant le lemme de Varadhan. Ont été notamment traités, dans [34], le modèle d'Ising ou de  $q$ -Potts sur réseaux aléatoires ou encore celui des matrices dites « couplées en chaîne ».

### I.1.4 Le développement en caractères

Si les interactions qui ne sont pas de type AB paraissent hors de portée d'un examen mathématique rigoureux, les physiciens, eux, sont allés bien au-delà et ont traité de nombreux modèles, notamment grâce à une jolie technique dite de « développement en caractères » que je vais m'efforcer de présenter ici, sans en donner de preuve rigoureuse — preuve que l'on pourra trouver dans un contexte précis dans le chapitre 1.

Le mécanisme en est assez simple et on peut le résumer ainsi : « On développe en série l'exponentielle ; on doit alors intégrer des polynômes, symétriques en les valeurs propres des matrices impliquées ; on change de base des polynômes symétriques et on les réexprime dans la base de Schur car les polynômes de Schur ont une propriété très favorable dans ce contexte de découplage par intégration unitaire. »

Cela mérite quelques explications, par exemple dans un cas qui a suscité un grand intérêt chez les physiciens : celui de l'interaction dite « de type ABAB » (étudié par exemple dans l'article [52]). On s'intéresse à une intégrale matricielle de la forme :

$$Z_N^{ABAB} = \iint_{\mathcal{H}_N \times \mathcal{H}_N} dAdB \exp(N\text{tr}P_1(A) + N\text{tr}P_2(B) + N\beta\text{tr}(ABAB)),$$

pour des polynômes  $P_1$  et  $P_2$  et un réel  $\beta$  bien choisis.

La première étape consiste à développer le terme d'interaction en série :

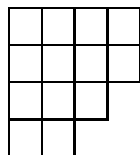
$$\exp(N\beta\text{tr}(ABAB)) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (N\beta)^n \left( \sum_{i=1}^N ((AB)_i)^2 \right)^n, \tag{I.8}$$

où les  $(AB)_i$  sont les valeurs propres de la matrice  $AB$ .

Le polynôme  $p(x_1, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^N x_i^2$  est un polynôme symétrique ; on le réexprime dans la base de Schur  $(s_\lambda)_{\lambda \in \mathcal{Y}}$  des polynômes symétriques, où  $\mathcal{Y}$  est l'ensemble des formes d'Young.

Cela nécessite quelques précisions et notations (tirées par exemple de la section 4.4. de l'ouvrage [67]) :

- une forme d'Young  $\lambda$  est une suite finie décroissante d'entiers positifs  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ . On peut la voir comme un diagramme dont la  $i$ -ème ligne est composée de  $\lambda_i$  cases (vides) : par exemple,



correspond à  $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 3, \lambda_4 = 2$ .

On note usuellement  $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$  le nombre total de cases de la forme  $\lambda$ .

- pour un  $N \in \mathbb{N}$  fixé, un *tableau d'Young* est un remplissage d'une forme d'Young à l'aide d'entiers compris entre 1 et  $N$ , croissant selon les lignes et strictement croissant selon les colonnes. Pour un tel remplissage, on définit le *contenu* du tableau comme le  $N$ -uplet  $(\mu_1; \dots; \mu_N)$  où  $\mu_i$  est le nombre de  $i$  dans le tableau.

Par exemple, 

1	1	2
2	3	
3		

 est autorisé (et a pour contenu  $(2; 2; 2)$ ) alors que 

1	1	2
1	3	
3		

 ne l'est pas.

- pour une forme  $\lambda$  et un entier  $N$ , le polynôme de Schur  $s_\lambda$  est un élément de  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_N]$  défini par

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = \sum_T x_1^{\mu_1} \dots x_N^{\mu_N},$$

où la somme est prise sur tous les tableaux  $T$  de forme fixée  $\lambda$  et  $(\mu_1; \dots; \mu_N)$  est le contenu de  $T$ .

Ainsi, le *polynôme de Schur* pour  $N = 2$  et  $\lambda = (2, 1)$  est donné par

$$s_\lambda(x_1, x_2) = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2,$$

puisque les seuls remplissages autorisés de  $\lambda$  avec des 1 et des 2 sont 

1	1
2	

 et 

1	2
2	

.

Avec ces notations, on peut facilement voir que la décomposition de notre polynôme  $p = \sum x_i^2$  dans la base de Schur est

$$p = s_{(2)} - s_{(1,1)}.$$

D'après la formule (I.8), ce sont maintenant les puissances du polynôme  $p$  qu'il nous faut calculer. Les théorèmes de Stanley (que l'on peut trouver dans [54]) nous indiquent que, pour toute forme d'Young  $\nu$ ,

$$s_\nu s_{(2)} = \sum_\lambda s_\lambda \quad \text{et} \quad s_\nu s_{(1,1)} = \sum_\mu s_\mu,$$

où les sommes sont prises sur les tableaux  $\lambda$  et  $\mu$  formés de  $\nu$  auquel on a rajouté respectivement un domino vertical ou un domino horizontal ce qui permet d'obtenir que

$$[p(x_1, \dots, x_N)]^n = \sum_\lambda (-1)^{\chi(\lambda)} \rho_\lambda s_\lambda(x_1, \dots, x_N),$$

où la somme est prise sur les tableaux  $\lambda$  formés de  $2n$  cases et pavables par dominos,  $\chi(\lambda)$  est égal à 0 si le nombre de dominos verticaux dans tout pavage de  $\lambda$  est pair et 1 s'il est impair<sup>§</sup> et enfin  $\rho_\lambda$  est le nombre de pavages possibles de  $\lambda$  par dominos (en tenant compte de l'ordre de construction du pavage).

L'étape-clé qui fait tout l'intérêt de ce changement de base est d'utiliser la propriété de découplage suivante :

$$\int_{\mathcal{U}_N} s_\lambda(AUBU^*) dm_N(U) = \frac{s_\lambda(A)s_\lambda(B)}{d_\lambda}, \quad \text{avec} \quad d_\lambda = \frac{\Delta(\ell)}{\prod_{i=1}^{N-1} i!}, \quad (\text{I.9})$$

<sup>§</sup>Cette parité est indépendante du pavage choisi.



où

- $m_N$  est la mesure de Haar sur le groupe unitaire  $\mathcal{U}_N$ , normalisée pour être une probabilité,
- on définit  $s_\lambda(A) := s_\lambda(A_1, \dots, A_N)$ , où les  $A_i$  sont les valeurs propres de  $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ ,
- $\ell$  est le  $N$ -uplet  $(\ell_1, \dots, \ell_N)$  avec  $\ell_j = \lambda_j + N - j$ ,
- et  $\Delta$  le déterminant de Vandermonde.

Notons que cette propriété de découplage (I.9) provient directement du fait que  $s_\lambda$  peut être vu comme le caractère de la représentation irréductible de  $\mathcal{U}_N$  indexée par la forme  $\lambda$ . En somme, les deux étapes de développement de l'exponentielle en série et de changement de base reviennent simplement à décomposer la représentation de  $\mathcal{U}_N$  de dimension infinie  $U \mapsto UBU^*$  sur la base des représentations irréductibles indexées par les tableaux d'Young. L'équation (I.9) traduit alors une propriété générale des caractères qui provient en fait de la « rigidité » des représentations (cf. [13] pour une preuve de cette relation) et  $d_\lambda$  est la dimension de  $\lambda$  en tant que représentation de  $\mathcal{U}_N$ . En tout état de cause, on obtient formellement<sup>h</sup>

$$Z_N^{ABAB} = \sum_{\ell} (N\beta)^{\frac{|\lambda|}{2}} c_\ell R_\ell(P_1)R_\ell(P_2), \tag{I.10}$$

où  $c_\ell$  est un facteur combinatoire ne dépendant que de  $\ell$  (et en fait que de la mesure empirique  $\hat{\nu}_N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\ell_j/N}$ ),  $|\lambda|$  est le nombre de cases de la forme  $\lambda$  et les  $R_\ell$  sont des intégrales à une matrice. Ces dernières font intervenir les  $s_\lambda$ , que l'on peut facilement relier, dans le cas de matrices positives, aux intégrales sphériques par les deux formules suivantes

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = \frac{\det(x_i^{\ell_j})_{i,j}}{\Delta(x_1, \dots, x_N)} \quad \text{et} \quad I_N(C_N, D_N) = \frac{\det(\exp NC_N(i)D_N(j))_{i,j}}{\Delta(C_N)\Delta(D_N)}$$

de sorte que

$$s_\lambda(M) = I_N\left(\log M, \frac{\ell}{N}\right) \Delta\left(\frac{\ell}{N}\right) \frac{\Delta(\log M)}{\Delta(M)}. \tag{I.11}$$

Et les physiciens appliquent ensuite une méthode du col pour déterminer quels sont les tableaux qui sont prédominants dans la somme obtenue et en déduire l'asymptotique de  $Z_N^{ABAB}$ .

L'un des résultats présentés dans cette thèse est la justification dans certains cas de cette preuve formelle et la démonstration que la méthode du col appliquée à ce développement en caractères peut effectivement donner les bonnes asymptotiques.

Comme le lecteur pourra le voir dans le chapitre 1, cela pose déjà pas mal de problèmes de grandes déviations assez techniques et nous nous sommes donc cantonnées au cas où les facteurs combinatoires  $c_\ell$  sont tous positifs<sup>i</sup>. Le contre-exemple de S. Zelditch [83] à la conjecture I.1.9 que nous présentons un peu plus loin indique d'ailleurs que cela ne donnerait pas les bonnes asymptotiques en toute généralité.

### I.1.5 Notre modèle. Résultats, conjecture et contre-exemples.

Un modèle intéressant qui remplit la condition de positivité que nous venons d'évoquer est une variante du modèle « des graphes doublement pondérés » qui a été présenté plus haut. Il est donné par l'intégrale suivante :

$$Z_N(\Phi) := Z_N(\Phi, A_N, B_N) := \int_{\mathcal{H}_N} dM e^{-\frac{N}{2} \text{tr} M^2 - \text{tr} \otimes \text{tr} \log(I \otimes I - B_N \otimes \Phi(M) A_N)}, \tag{I.12}$$

<sup>h</sup>En effet, la « preuve » de la relation (I.10) que nous sommes en train de fournir est bien sûr seulement formelle.

<sup>i</sup>Ce qui n'est pas le cas pour le modèle  $ABAB$ .

où  $dM$  est comme d'habitude la mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{H}_N$  et  $\Phi$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$ . Afin que l'intégrale soit bien définie, on impose la condition suivante

$$\|\Phi\|_\infty \cdot \sup_N \|A_N\| \cdot \sup_N \|B_N\| < 1, \quad (\text{I.13})$$

mais le modèle initial des physiciens [51] faisait intervenir la fonction  $\Phi(x) = x$ , qui ne rentre donc pas dans le cadre de nos hypothèses. Le lecteur intéressé par cette question pourra trouver dans la conclusion du chapitre 1 quelques éléments de réponse sur l'applicabilité de nos résultats au modèle initial.

Un des résultats principaux du chapitre 1 est le théorème qui donne la convergence de  $Z_N(\Phi)$ .

### Théorème I.1.7

- *Sous des hypothèses appropriées,  $\frac{1}{N^2} \log \frac{Z_N(\Phi)}{Z_N(0)}$  converge quand  $N \rightarrow \infty$  et on a une formule variationnelle pour la limite.*
- *On a une caractérisation des valeurs d'adhérence de la mesure spectrale de  $M$  sous la mesure de Gibbs associée au modèle.*

La stratégie de la preuve repose sur le développement en caractères de  $Z_N(\Phi)$ , selon le procédé que nous avons présenté au paragraphe précédent. Dans ce cas, une formule dite « de Cauchy » nous donne

$$e^{-\text{tr} \otimes \text{tr} \log(I \otimes I - B_N \otimes \Phi(M) A_N)} = \sum_\lambda s_\lambda(B_N) s_\lambda(\Phi(M) A_N).$$

La propriété (I.9) de découplage par intégration unitaire des  $s_\lambda$  et leur expression (I.11) en fonction des intégrales sphériques donnent finalement, si on suppose de plus  $A_N$ ,  $B_N$  et  $\Phi$  positifs,

$$Z_N(\Phi) = c_N \sum_\lambda I_N\left(\log A_N, \frac{\ell}{N}\right) I_N\left(\log B_N, \frac{\ell}{N}\right) Z_N(\Phi, \lambda),$$

avec

$$Z_N(\Phi, \lambda) := \int I_N\left(\log \Phi(M), \frac{\ell}{N}\right) \frac{\Delta(\log \Phi(M))}{\Delta(\Phi(M))} \Delta(M)^2 e^{-\frac{N}{2} \sum_{i=1}^N M_i^2} \prod_{i=1}^N dM_i,$$

ce qui nous a amenées à montrer un principe de grandes déviations pour la mesure empirique  $\hat{\mu}_\lambda^N := 1/N \sum_{i=1}^N \delta_{\ell_j/N}$  des formes  $\lambda$  dans un cadre un peu plus général, soit le théorème suivant :

**Théorème I.1.8** *Soient  $(F, c, (A_N, B_N)_{N \geq 0}, a, b)$  qui satisfont les hypothèses suivantes :*

1.  *$F$  est une fonction continue bornée de  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$  dans  $\mathbb{R}$ .*
2.  *$c : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue telle que  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} c(x)/x > 0$ .*
3.  *$(A_N, B_N)_{N \geq 0}$  est une suite de matrices dont les valeurs propres prennent leurs valeurs dans  $[\varepsilon, 1]$  pour un  $\varepsilon > 0$  et telles que les mesures spectrales de  $A_N$  et  $B_N$  convergent vers  $\mu_A$  et  $\mu_B$  respectivement.*
4.  *$a, b$  sont deux réels positifs.*

On considère la mesure positive  $\Pi^N$  sur  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$  donnée, pour tout sous-ensemble mesurable  $X \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ , par

$$\Pi^N(X) = \sum_{\lambda} 1_{\hat{\mu}_{\lambda}^N \in X} s_{\lambda}(A_N)^a s_{\lambda}(B_N)^b e^{N^2 F(\hat{\mu}_{\lambda}^N) - N^2 \int c(x) d\hat{\mu}_{\lambda}^N(x)}. \quad (\text{I.14})$$

Alors  $(\Pi^N)_{N \geq 0}$  satisfait un principe de grandes déviations et on sait donner une formulation variationnelle de la fonction de taux en termes de  $F$ ,  $c$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\mu_A$  et  $\mu_B$ .

On obtient ensuite à partir de là les asymptotiques de  $Z_N(\Phi)$  par méthode de Laplace, confirmant ainsi, sous les hypothèses (I.13) et  $\Phi$ ,  $A_N$  et  $B_N$  strictement positifs, les résultats des physiciens qu'on peut trouver dans la référence [51].

Mentionnons pour finir le contre-exemple suivant, mis en évidence par S. Zelditch [83]. Dans cet article, l'auteur s'intéresse au modèle de Yang-Mills sur un cylindre avec groupe de jauge  $\mathcal{U}_N$  (pour la description et la signification physique du modèle, on pourra se reporter par exemple à l'article [33] et aux références qui s'y trouvent). Sa fonction de partition est donnée par

$$Z_N(U_1, U_2) := \sum_{\lambda} s_{\lambda}(U_1) s_{\lambda}(U_2^*) e^{-\frac{A}{2N} C_2(\lambda)},$$

où  $C_2$  est une fonction continue de la mesure empirique de  $\lambda$ ,  $U_1$  et  $U_2$  sont deux matrices unitaires fixées (dépendant uniquement du cylindre choisi) et  $A$  est une constante positive.

De ce développement, les physiciens (notamment dans [33]) ont tiré la conjecture suivante :

**Conjecture I.1.9** *Si les mesures spectrales de  $U_1$  et  $U_2$  convergent respectivement vers deux mesures de probabilités  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  alors l'énergie libre  $\frac{1}{N^2} \log Z_N(U_1, U_2)$  converge quand  $N$  tend vers l'infini (vers une fonction de  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ ).*

Nous obtenons dans le chapitre 1, comme corollaire du théorème I.1.8, une preuve de cette conjecture dans le cas où  $U_1$  et  $U_2$  sont des matrices hermitiennes strictement positives :

**Corollaire I.1.10** *La conjecture I.1.9 est vraie si  $U_1$  et  $U_2$  sont hermitiennes et en outre supposées uniformément minorées par  $\varepsilon I$ , pour un  $\varepsilon > 0$ .*

On se reportera au théorème 1.6.1 pour un énoncé plus précis.

Cependant, S. Zelditch donne dans l'article [83] des contre-exemples à cette conjecture pour certains choix de  $U_1$  et  $U_2$  dans  $\mathcal{U}_N$ . Ainsi, en prenant l'identité pour  $U_1$  et un élément principal de type  $\rho$  pour  $U_2$ , il montre que la fonction de partition  $Z_N(U_1, U_2)$  a dans ce cas un comportement en  $e^{-N^3}$  et non pas en  $e^{-N^2}$  comme prévu par la conjecture. Cela s'explique par le fait que  $s_{\lambda}(U_2^*)$  prend ses valeurs dans  $\{-1, 0, +1\}$  et que ses oscillations entraînent plus de compensations que prévu entre les termes en  $\pm 1$ .

En conclusion, la technique de développement en caractères semble être fort puissante puisqu'elle permet en quelque sorte de réduire « n'importe quelle » interaction à des intégrales sphériques dont on connaît bien les asymptotiques. En échange, on récupère une somme indexée par les tableaux d'Young, qu'on parvient à traiter de manière satisfaisante... tout au moins lorsque la somme obtenue n'est pas signée. Notre travail, exposé dans le chapitre 1 de cette thèse, a permis de montrer que cette technique est valide non seulement physiquement mais aussi mathématiquement tandis que le contre-exemple que nous venons d'évoquer fait de la détermination exacte de son domaine d'application une question réellement pertinente.

## I.2 Du rôle des matrices aléatoires en probabilités libres : autour d'une nouvelle vision de la $R$ -transformée

Le deuxième point que nous souhaitons aborder consiste à souligner comment le cadre des probabilités libres peut donner des outils pour l'étude des grandes matrices aléatoires et comment elles s'inscrivent dans cette théorie — en tant qu'« archétype », pourrait-on dire, de variables aléatoires libres.

Nous verrons que le chapitre 2 en particulier constitue une confirmation de l'importance des matrices aléatoires en probabilités libres puisqu'on y montre notamment le résultat suivant :

**Théorème I.2.1** *Pour un réel  $\theta$  assez petit et  $(B_N)_{N \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices diagonales réelles uniformément bornées et dont la mesure spectrale converge vers une mesure  $\mu_B$  à support compact,*

$$\frac{1}{N} \log \int e^{N\theta(U B_N U^*)^{11}} dm_N(U) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_0^{2\theta} R_{\mu_B}(u) du,$$

où  $m_N$  est la mesure de Haar sur  $\mathcal{O}_N$  et  $R_{\mu_B}$  est la  $R$ -transformée de  $\mu_B$ ,

résultat qui fournit en quelque sorte un « modèle matriciel » pour la  $R$ -transformée, qui est un objet central en probabilités libres comme on le verra plus bas.

Ce type de résultat va aussi nous permettre de montrer, par des moyens différents des preuves classiques déjà connues, l'additivité de cet opérateur par convolution libre, soit l'égalité suivante :

**Proposition I.2.2** *Si  $\mu_A$  et  $\mu_B$  sont deux mesures à support compact sur  $\mathbb{R}$ ,*

$$R_{\mu_A \boxplus \mu_B} = R_{\mu_A} + R_{\mu_B}.$$

Le survol très sommaire que nous allons effectuer des notions de probabilités libres qui nous seront utiles sera pour nous l'occasion de détailler les motivations et l'intérêt des résultats du chapitre 2 et de leurs applications possibles, notamment à l'étude des déviations de la plus grande valeur propre d'une matrice gaussienne symétrique perturbée par une matrice déterministe de rang fini, présentée dans le chapitre 3, ainsi que d'évoquer brièvement les problèmes présentés dans l'annexe.

### I.2.1 Ce que l'on sait de la place des matrices aléatoires en probabilités libres

#### Très bref rappel du contexte des probabilités libres

Avant d'entrer dans le vif du sujet, on cherche simplement dans ce préambule à fixer les idées du lecteur par quelques rappels. Il nous semble éclairant de souligner les parallèles avec le contexte classique dans le tableau suivant.

Pour une présentation plus complète de cette théorie, on renverra volontiers le lecteur vers le cours de D. Voiculescu à Saint-Flour [78] ou vers l'introduction remarquablement accessible de P. Biane [10], au titre encourageant.

	<b>Probabilités classiques</b>	<b>Probabilités libres</b>
<b>Espace</b>	$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , où $\mathcal{F}$ est une tribu sur $\Omega$ et $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité. On associe à $\mathbb{P}$ l'espérance correspondante $\mathbb{E}$	$(\mathcal{W}, \varphi)$ où $\mathcal{W}$ est une $C^*$ -algèbre (i.e. une algèbre de Banach munie d'une involution $a \mapsto a^*$ ) et $\varphi$ est un état tracial (i.e. une application linéaire de $\mathcal{W}$ dans $\mathbb{C}$ telle que $\varphi(ab) = \varphi(ba)$ , $\varphi(1) = 1$ et $\varphi(a) \geq 0$ si $a \geq 0$ )
<b>Variables aléatoires</b>	$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$ -mesurables [on se limite à des v.a. bornées]	$a \in \mathcal{W}$
<b>Distribution / loi</b>	La distribution de $X$ est définie par $\mu_X(A) = \mathbb{P}(X^{-1}(A))$ , $\forall A \in \mathcal{F}$ mais elle peut être aussi vue, dans le cas où $X$ est bornée comme l'unique mesure telle que $\int P(x) d\mu_X(x) = \mathbb{E}[P(X)]$ , $\forall P \in \mathbb{C}[Y]$	Si $a$ est normal, la distribution de $a$ est l'application $\mu_a : \mathbb{C}[Y] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\mu_a(P) = \varphi(P(a))$ , $\forall P \in \mathbb{C}[Y]$ . Sinon, la distribution de $a$ est la distribution jointe de $(a, a^*)$ .
<b>Distribution jointe de plusieurs variables aléatoires</b>	Si $X_1, \dots, X_p$ sont $p$ v.a., leur loi jointe est $\mu_{X_1, \dots, X_p}$ où $\int P(x_1, \dots, x_p) d\mu_{X_1, \dots, X_p}(x_1, \dots, x_p) = \mathbb{E}[P(X_1, \dots, X_p)]$ pour tout $P \in \mathbb{C}[Y_1, \dots, Y_p]$	$a_1, \dots, a_p \in \mathcal{W}$ . $\forall P \in \mathbb{C}\langle Y_1, \dots, Y_p \rangle$ , $\mu_a(P) = \varphi(P(a_1, \dots, a_p))$ où $\mathbb{C}\langle Y_1, \dots, Y_p \rangle$ est l'ensemble des polynômes <b>non commutatifs</b> à $p$ variables
<b>Indépendance</b>	<b>Indépendance usuelle :</b> $X_1, \dots, X_p$ sont indépendantes si pour toutes fonctions $f_1, \dots, f_p$ mesurables $\mathbb{E}([f_1(X_1) - \mathbb{E}f_1(X_1)] \dots [f_p(X_p) - \mathbb{E}f_p(X_p)]) = 0$ .	<b>Liberté :</b> $a_1, \dots, a_p \in \mathcal{W}$ sont libres si $\varphi((a_{i_1} - \varphi(a_{i_1})) \dots (a_{i_k} - \varphi(a_{i_k}))) = 0$ dès que pour tout $j \leq k-1$ , $i_j \neq i_{j+1}$ .
<b>Convolution</b>	<b>Convolution usuelle :</b> si $X$ est indépendante de $Y$ , la loi de $X + Y$ est donnée par le produit de convolution de leur loi, noté $\mu_X * \mu_Y$ .	<b>Convolution libre :</b> si $a$ et $b$ sont libres, la loi de $a + b$ est la convolution libre de leur loi, notée $\mu_a \boxplus \mu_b$
<b>Transformation linéarisant la convolution</b>	<b>Logarithme de la transformée de Fourier :</b> $\log \widehat{\mu_X * \mu_Y} = \log \widehat{\mu_X} + \log \widehat{\mu_Y}$	<b><math>R</math>-transformée :</b> $R_{\mu_a \boxplus \mu_b} = R_{\mu_a} + R_{\mu_b}$ (cf. paragraphe I.2.2 pour une définition précise et des détails).
<b>Théorème central limite</b>	Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, de carré intégrable, alors, si $\sigma^2$ désigne leur variance commune, $\frac{X_1 + \dots + X_n - n\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, 1)$ , où $\mathcal{N}(0, 1)$ est une loi normale centrée de variance 1.	Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires libres les unes des autres, de même loi, centrées, telles que $\varphi(a_i^2) = \frac{\alpha^2}{4}$ et telles que tous leurs moments soient bornés alors $\mu_{\frac{1}{\sqrt{n}}(a_1 + \dots + a_n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sigma_\alpha$ , où $\sigma_\alpha$ est la loi semi-circulaire $\sigma_\alpha := \frac{2}{\pi\alpha^2} 1_{[-\alpha, \alpha]} \sqrt{\alpha^2 - t^2} dt$ .

En particulier, pour le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire celui des matrices aléatoires, le contexte est le suivant :  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  étant un espace de probabilité, on pose  $\mathcal{A}_N = \bigcap_{1 \leq p \leq \infty} L^p(\Omega, \mathcal{M}_N(\mathbb{C}))$ .  $\mathcal{A}_N$  est alors munie d'une involution naturelle (l'adjonction dans  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ ) et on définit l'état tracial  $\varphi_N : \mathcal{A}_N \rightarrow \mathbb{C}$  donné par

$$\varphi_N(T) = \frac{1}{N} \int \text{tr}(T(\omega)) d\mathbb{P}(\omega),$$

de sorte qu'une matrice aléatoire  $T$  peut maintenant être vue soit comme une variable aléatoire classique (à valeurs dans  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  cependant) soit comme une variable aléatoire libre si on considère  $T$  comme un élément de  $(\mathcal{A}_N, \varphi_N)^j$ .

Venons-en maintenant à proprement parler à la place des matrices aléatoires dans le développement de la théorie des probabilités libres. Nous allons souligner à quel point elle est cruciale, d'une part parce qu'elles sont « asymptotiquement libres » et d'autre part parce qu'elles sont au centre de la notion d'entropie libre (qui est un équivalent de la notion classique d'entropie de Shannon).

### Liberté asymptotique

L'idée générale peut se résumer ainsi : si on considère des matrices indépendantes (au sens habituel), elles deviennent, à la limite  $N \rightarrow \infty$ , libres les unes des autres. L'un des premiers résultats en la matière est dû à D. Voiculescu lui-même. Il concerne les matrices gaussiennes et peut s'exprimer de la façon suivante :

**Théorème I.2.3** *Soit  $(G_{s,N})_{s \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices aléatoires dans  $\mathcal{A}_N$ , autoadjointes, indépendantes les unes des autres et dont les entrées  $a(i, j; N, s)$  sont telles que  $(\text{Re } a(i, j; N, s))_{1 \leq i < j \leq N}$ ,  $(\text{Im } a(i, j; N, s))_{1 \leq i < j \leq N}$  et  $(a(j, j; N, s))_{1 \leq j \leq N}$  sont des gaussiennes indépendantes centrées de variance  $1/2N$  pour les deux premières suites et  $1/N$  pour la troisième. Soit, d'autre part,  $D_N \in \mathcal{A}_N$  une suite de matrices diagonales à entrées uniformément bornées telles que la mesure spectrale  $\hat{\mu}_{D_N}$  converge faiblement.*

*Alors  $D_N, G_{1,N}, G_{2,N}, \dots$  sont asymptotiquement libres quand  $N \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire que la distribution jointe de  $D_N, G_{1,N}, G_{2,N}, \dots$  a une limite  $\mu_\infty$  qui est la distribution de variables libres les unes des autres.*

Des résultats similaires ont ensuite été montrés pour d'autres types de matrices aléatoires, par exemple des matrices unitaires distribuées selon la mesure de Haar, ou bien des matrices à entrées indépendantes, toutes de même loi mais non gaussiennes etc. mais l'esprit reste le même.

Tous ces résultats montrent en tous cas que les matrices aléatoires fournissent une sorte de modèle asymptotique pour des variables aléatoires libres. Elles sont un ingrédient pour construire ou approcher toutes sortes de lois. On peut ajouter dans ce sens que, selon une conjecture d'A. Connes, toute loi sur  $(\mathcal{A}, \varphi)$  peut être (pour une topologie à préciser) approchée par la loi jointe de matrices aléatoires quand leur taille tend vers l'infini.

Nous ne manquerons d'ailleurs pas d'utiliser nous-mêmes ce procédé dans le chapitre 2, où l'on a choisi d'approcher le produit de convolution  $\mu_A \boxplus \mu_B$  par la mesure spectrale de  $A_N + V_N B_N V_N^*$

---

<sup>j</sup> $(\mathcal{A}_N, \varphi_N)$  n'est pas à proprement parler une  $C^*$ -algèbre parce que ses éléments ne sont pas nécessairement bornés mais il possède toutes les bonnes propriétés. Par abus de langage, on le considère encore comme un espace de probabilités libres.

où les mesures spectrales de  $A_N$  et  $B_N$  convergent faiblement respectivement vers  $\mu_A$  et  $\mu_B$  et  $V_N$  est distribuée selon la mesure de Haar sur le groupe unitaire  $\mathcal{U}_N$ .

### Entropie libre

Un autre pan de la théorie des probabilités libres dans lequel les matrices aléatoires jouent un rôle prépondérant est tout ce qui concerne l'entropie. En effet, il a été possible (cf. [73] et la série d'articles [74], [75], [76] et [77]) de définir, dans le contexte libre, un équivalent de l'entropie de microétats (dite aussi entropie de Shannon) de la manière suivante :

#### Définition I.2.4

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -uplet de variables aléatoires (supposées autoadjointes pour simplifier) dans  $(\mathcal{A}, \varphi)$ . Pour  $m \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $R > 0$ , on définit  $\Gamma_R(X_1, \dots, X_n; m, k, \varepsilon)$  comme l'ensemble des  $n$ -uplets de matrices autoadjointes de taille  $k$  et de norme bornée par  $R$  telle que, pour tout  $p \leq m$  et tout choix de  $i_1, \dots, i_p$ ,

$$\left| \varphi(X_{i_1} \dots X_{i_p}) - \frac{1}{k} \operatorname{tr}(A_{i_1} \dots A_{i_p}) \right| < \varepsilon.$$

Si  $\operatorname{vol}$  désigne le volume sur  $(\mathcal{H}_k)^m$  hérité du produit scalaire usuel alors

$$\chi(X_1, \dots, X_n) = \sup_{R > 0} \inf_{m \in \mathbb{N}} \inf_{\varepsilon > 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{k^2} \log \operatorname{vol} \Gamma_R(X_1, \dots, X_n; m, k, \varepsilon) + \frac{n}{2} \log k \right)$$

est l'entropie libre de microétats du  $n$ -uplet  $(X_1, \dots, X_n)$ .

On peut notamment vérifier que cette fonction  $\chi$  possède bien les propriétés habituelles d'une entropie, à savoir d'être sous-additive et même additive quand les variables aléatoires mises en jeu sont libres entre elles. À moment d'ordre 2 fixé, elle est maximisée par la loi semi-circulaire, qui se trouve donc être l'analogue de la gaussienne en probabilités classiques, comme nous avons déjà pu le constater en la voyant apparaître dans le théorème central limite libre.

Pour rendre plus clair encore le lien de cette entropie  $\chi$  avec les matrices aléatoires que nous avons déjà rencontrées et les intégrales matricielles dont nous avons parlé plus haut, mentionnons le résultat suivant (qui apparaît dans l'article [15]) : dans la définition I.2.4 de  $\chi$ , on peut remplacer la mesure de Lebesgue  $\operatorname{vol}$  par la mesure gaussienne sur  $(\mathcal{H}_k)^m$ . Cela change un peu l'expression de l'entropie (par l'ajout d'un terme gaussien) mais ni ses propriétés ni les questions qui se posent à son sujet (et dont on pourra trouver un aperçu par exemple dans [35]). L'avantage en revanche est qu'on dispose alors pour l'étudier des résultats connus sur les matrices gaussiennes ainsi que des outils de calcul stochastique liés à leur représentation brownienne.

Notons pour finir que, même si cette notion d'entropie libre n'est pas véritablement au centre de notre propos, nous tenions à la mentionner, d'une part par souci d'exhaustivité sur l'importance des matrices aléatoires et d'autre part parce que les problèmes d'identification de certaines fonctions de taux, évoqués dans la partie A.2 de l'annexe, peuvent se reformuler comme des questions portant sur la compréhension de l'entropie libre (on pourra consulter notamment [35] pour plus de renseignements sur le sujet).

## I.2.2 Une nouvelle représentation de la $R$ -transformée comme confirmation de l'importance de ce lien

### Quelques éléments sur la $R$ -transformée

Dans le tableau de présentation des probabilités libres au paragraphe précédent, la  $R$ -transformée est apparue de façon un peu vague comme l'analogie du logarithme de la transformée de Fourier. Il convient maintenant d'en donner une définition plus précise (qui a été elle aussi proposée par D. Voiculescu dans [72]).

**Définition I.2.5** Soit  $\mu : \mathbb{C}[X] \rightarrow \mathbb{C}$  la distribution d'une variable aléatoire dans un espace de probabilités  $(\mathcal{A}, \varphi)$ . On introduit sa transformée de Hilbert définie par  $H_\mu(z) = \sum_{n \geq 0} \mu(X^n) z^{-n-1}$ , pour  $z \in \mathbb{C}$ . Soit  $K_\mu$  l'inverse formel de  $H_\mu$  (i.e.  $K_\mu(H_\mu(z)) = z$ ). Alors la  $R$ -transformée  $R_\mu$  de  $\mu$  est donnée par  $R_\mu(z) = K_\mu(z) - z^{-1}$ .

### Remarque I.2.6

- Si  $\mu$  est à support compact contenu dans  $\mathbb{R}$ ,  $H_\mu(z) = \int \frac{d\mu(t)}{z-t}$  est analytique sur  $\mathbb{C} \setminus \text{supp}(\mu)$  et on peut l'inverser sur un voisinage de l'infini de sorte que  $R_\mu$  est bien définie au moins sur un voisinage de 0.
- La  $R$ -transformée caractérise la mesure dont elle provient, au moins lorsqu'il s'agit d'une mesure à support compact inclus dans  $\mathbb{R}$ .

Comme nous l'avons énoncé dans la proposition I.2.2 plus haut, la  $R$ -transformée linéarise la convolution libre. On peut citer deux preuves « classiques » (cf. par exemple [78]) de cette propriété. L'une consiste à utiliser une représentation particulière pour les variables aléatoires dont  $\mu_A$  et  $\mu_B$  sont les distributions en les réalisant à l'aide d'opérateurs de création et d'annihilation sur l'espace de Fock, l'autre à réécrire la  $R$ -transformée sous forme de série

$$R_\mu(z) = \sum_{n \geq 0} R_{n+1}(\mu) z^n \tag{I.15}$$

et à étudier la combinatoire des coefficients  $R_n(\mu)$ , qui sont appelés « cumulants libres » de  $\mu$ . Cela fait intervenir des objets combinatoires bien particuliers, les partitions non croisées (cf. par exemple [70] pour plus de détails). Nous n'allons pas détailler ici ces notions car cela nécessite beaucoup de notations mais nous y reviendrons un peu plus longuement sur un exemple précis dans l'annexe de ce document, en particulier dans le paragraphe A.2.2.

Notons à ce propos que la représentation (I.15) a l'avantage de se généraliser au cas à plusieurs variables, ce qui nous sera utile dans le contexte des problèmes de l'annexe.

Dans cette thèse, nous donnons une troisième preuve de cette additivité, qui s'affranchit totalement de la combinatoire des cumulants. Elle s'appuie sur une approximation de la  $R$ -transformée par des intégrales matricielles comme dans la proposition I.2.1 et la liberté asymptotique de certaines matrices aléatoires mises en jeu, à la base de la propriété suivante,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{V_N} \frac{1}{N} \log \int_U e^{N\theta(U(A_N + V_N B_N V_N^*)U^*)_{11}} dm_N(U) dm_N(V_N) \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \int e^{N\theta(U A_N U^*)_{11}} dm_N(U) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \int e^{N\theta(U B_N U^*)_{11}} dm_N(U), \end{aligned}$$



qui est le point central de notre argumentation et nécessite une étude détaillée de l'intégrale sphérique.

**Retour sur l'intégrale sphérique**  $I_N^{(\beta)}(\mathbf{D}_N, \mathbf{E}_N) = \int e^{\mathbf{N} \operatorname{tr}(\mathbf{U} \mathbf{D}_N \mathbf{U}^* \mathbf{E}_N)} d\mathbf{m}_N^{(\beta)}(\mathbf{U})$

Nous avons vu dans la première partie de cette introduction que l'intégrale sphérique jouait un rôle central dans les problèmes de modèles de matrices, d'une part parce que les modèles à interaction de type  $AB$ , dans lesquels elle intervient directement, recouvrent des modèles de physique statistique parmi les plus importants, comme le modèle d'Ising ou les modèles de Potts, d'autre part parce qu'on peut d'une certaine manière, grâce à la méthode de développement en caractères, « réduire » la plupart des interactions à des intégrales sphériques impliquant des tableaux d'Young (on se reportera au chapitre 1 pour le détail). Cela a notamment suscité beaucoup d'intérêt pour ses asymptotiques dans le cas où les mesures spectrales des deux matrices impliquées convergent faiblement vers des mesures « suffisamment lisses », donnant lieu au théorème I.1.6, cité plus haut et établi dans [38].

Afin de compléter notre compréhension de cet objet, nous nous sommes intéressées à un autre régime asymptotique : le cas où l'une des matrices est de rang fini (i.e. borné indépendamment de  $N$ ). Nous obtenons dans ce cas le résultat assez frappant que l'intégrale sphérique fournit un modèle asymptotique pour la  $R$ -transformée de la mesure spectrale de la matrice de rang plein, comme le montre la proposition I.2.1, dans le cas où la matrice de rang fini est seulement de rang 1. Dans ce cas, on dispose désormais d'une description complète du comportement de l'intégrale sphérique correspondante grâce au théorème suivant :

**Théorème I.2.7** *Soit  $\beta = 1$  ou  $2$  et  $D_N = \operatorname{diag}(\theta, 0, \dots, 0)$ . On suppose que la mesure spectrale  $\hat{\mu}_{E_N}^N$  de  $E_N$  converge vers une mesure à support compact  $\mu_E$  tandis que la plus grande et la plus petite valeur propre de  $E_N$  convergent respectivement vers  $\lambda_{\max}$  et  $\lambda_{\min}$ .*

*Soient  $H_{\min} := \lim_{z \uparrow \lambda_{\min}} H_{\mu_E}(z)$  et  $H_{\max} := \lim_{z \downarrow \lambda_{\max}} H_{\mu_E}(z)$ , alors*

$$I_{\mu_E}^{(\beta)}(\theta) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log I_N^{(\beta)}(D_N, E_N)$$

*existe et est donné par*

$$I_{\mu_E}^{(\beta)}(\theta) = \theta v(\theta) - \frac{\beta}{2} \int \log \left( 1 + \frac{2}{\beta} \theta v(\theta) - \frac{2}{\beta} \theta \lambda \right) d\mu_E(\lambda)$$

*avec*

$$v(\theta) = \begin{cases} R_{\mu_E} \left( \frac{2}{\beta} \theta \right) & \text{si } H_{\min} \leq \frac{2\theta}{\beta} \leq H_{\max} \\ \lambda_{\max} - \frac{\beta}{2\theta} & \text{si } \frac{2\theta}{\beta} > H_{\max} \\ \lambda_{\min} - \frac{\beta}{2\theta}, & \text{si } \frac{2\theta}{\beta} < H_{\min}. \end{cases}$$

*En particulier, dans le premier cas, on retrouve*

$$I_{\mu_E}^{(\beta)}(\theta) = \frac{\beta}{2} \int_0^{\frac{2\theta}{\beta}} R_{\mu_E}(u) du.$$

Esquissons maintenant une preuve (dont on trouve le détail dans le chapitre 2) de ce théorème dans un cas facile, c'est-à-dire pour  $\theta$  assez petit. Pour alléger les notations, on décrit ci-après le cas orthogonal ( $\beta = 1$ ).

Nous utilisons pour commencer la représentation gaussienne bien connue pour une matrice orthogonale distribuée selon la mesure de Haar, à savoir que les vecteurs-colonnes d'une telle matrice ont même loi que des vecteurs obtenus par un procédé d'orthonormalisation de Schmidt à partir de vecteurs gaussiens indépendants.

En rang 1, si  $D_N = \text{diag}(\theta, 0, \dots, 0)$  et  $E_N = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ , cela donne simplement

$$I_N(D_N, E_N) = \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ N\theta \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i g_i^2}{\sum_{i=1}^N g_i^2} \right\} \right],$$

où  $\mathbb{E}$  désigne l'espérance sous la mesure  $\gamma^{\otimes N}$  avec  $\gamma$  la loi gaussienne sur  $\mathbb{R}$  centrée réduite. On utilise alors le fait que  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i^2$  se localise fortement autour de 1 ; il reste donc à déterminer comment se comporte  $\sum_{i=1}^N \lambda_i g_i^2$ . On écrit pour l'instant sans dommage

$$I_N(D_N, E_N) \sim e^{N\theta v_N} \int \mathbf{1}_{\mathcal{A}_N} e^{\theta \sum_{i=1}^N \lambda_i g_i^2 - v_N \sum_{i=1}^N g_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N g_i^2} \prod_{i=1}^N dg_i,$$

où  $\mathcal{A}_N$  est précisément l'événement  $\left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i^2 \text{ est proche de } 1 \right\}$ . Si on choisit  $v_N$  tel que

$$\forall i, 1 + 2\theta v_N - 2\theta \lambda_i > 0, \quad (\text{I.16})$$

on peut faire le changement de variable  $\tilde{g}_i = g_i \sqrt{1 + 2\theta v_N - 2\theta \lambda_i}$  et si on note  $\tilde{P}_N$  la nouvelle mesure de probabilités ainsi obtenue, on a

$$I_N(D_N, E_N) \sim e^{N\theta v_N} \prod_{i=1}^N \left[ \sqrt{1 + 2\theta v_N - 2\theta \lambda_i} \right]^{-1} \tilde{P}_N(A_N).$$

Si on veut que  $\tilde{P}_N(A_N)$  ne soit pas exponentiellement négligeable, il faut imposer

$$\mathbb{E}_{\tilde{P}_N} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i^2 \right) = 1, \quad \text{ce qui se réécrit} \quad \frac{1}{2\theta} H_{E_N} \left( v_N + \frac{1}{2\theta} \right) = 1, \quad (\text{I.17})$$

où  $H_{E_N}(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{z - \lambda_i}$  est la résolvante de la matrice  $E_N$ . On peut montrer que l'équation (I.17) a exactement une solution qui satisfait (I.16) et ces considérations assez simples permettent d'obtenir que, dans les cas où tout se passe bien (c'est-à-dire en fait où tout se passe uniformément en dehors des supports des mesures spectrales des matrices  $E_N$ ), on a

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log I_N(D_N, E_N) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \theta v_N - \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \log(1 + 2\theta v_N - 2\theta \lambda_i) \right] \\ &= \theta R_{\mu_E}(2\theta) - \frac{1}{2} \int \log(1 + 2\theta R_{\mu_E}(2\theta) - 2\theta \lambda) d\mu_E(\lambda) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\theta} R_{\mu_E}(u) du. \end{aligned}$$

L'obtention des asymptotiques complètes dans le cas rang 1 et l'extension au plan complexe requièrent des considérations de grandes déviations plus compliquées. On trouvera toutes les précisions dans le chapitre 2.

On s'est aussi posé la question de la généralisation d'un tel résultat en rang supérieur. On peut y répondre tant que le rang de  $D_N$  reste petit devant  $\sqrt{N}$  et on obtient alors le théorème suivant (cf. Theorem 2.1.7 pour le détail des hypothèses) :

**Théorème I.2.8** *On suppose que  $D_N = \text{diag}(\theta_1^N, \dots, \theta_{M(N)}^N, 0, \dots, 0)$  avec  $M(N) = o(N^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$  pour un certain  $\varepsilon > 0$  et que les  $\theta_i^N$  sont assez petits et tels que la mesure empirique  $\frac{1}{M(N)} \sum_{i=1}^{M(N)} \delta_{\theta_i^N}$  converge vers  $\mu_D$ . On suppose aussi que  $(E_N)_{N \in \mathbb{N}}$  est uniformément bornée et que  $\hat{\mu}_{E_N}^N$  converge vers  $\mu_E$ . Alors*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NM(N)} \log I_N^{(\beta)}(D_N, E_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M(N)} \sum_{i=1}^{M(N)} I_{\mu_E}^{(\beta)}(\theta_i^N) = \int I_{\mu_E}^{(\beta)}(\theta) d\mu_D(\theta).$$

L'idée principale contenue dans ce résultat est que l'intégrale sphérique en rang  $M$  se comporte comme le produit d'intégrales sphériques en rang 1.

Cela provient du fait que lorsqu'on considère un petit nombre de vecteurs gaussiens dans un espace de grande dimension, ceux-ci sont avec une grande probabilité presque orthogonaux. Bien entendu, il faut donner un sens précis à cette affirmation : de nombreux articles traitent d'ailleurs de cette question, certains récents (par exemple [47] ou [18]), d'autres beaucoup plus anciens (comme [12]). Pour nous, cela signifie que le procédé d'orthogonalisation de nos  $M$  vecteurs va laisser les vecteurs gaussiens presque inchangés donc en particulier à peu près indépendants, de sorte qu'on observe asymptotiquement cette propriété de découplage.

Notons cependant que ce résultat n'est valable que dans les cas favorables. En particulier, on ne peut pas s'affranchir totalement de l'hypothèse que les  $\theta_i^N$  sont assez petits. En effet, le théorème I.2.7 cité plus haut révèle qu'en rang 1, lorsque  $\theta := \theta_1^N$  devient grand, il s'opère une transition de phase : au lieu d'être en position typique, moyennant donc les contributions des différents  $\lambda_i$ , le vecteur unitaire  $g/\|g\|$  s'aligne, autant que faire se peut, sur le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre, déviant donc nettement du comportement typique. Il n'y a alors plus aucune raison que les vecteurs unitaires restent « presque indépendants ». Dans ce cas-là, une conjecture raisonnable, notamment au vu des résultats de [5], semble être que la limite de l'intégrale sphérique en rang  $M$  fait intervenir non plus seulement la plus grande valeur propre mais les  $M$  plus grandes. Ceci fait l'objet d'un travail en cours, en collaboration avec S. Péché. Les premiers résultats, qui nécessitent un contrôle fin de la continuité de l'intégrale sphérique en la mesure empirique et la plus grande valeur propre de la matrice de rang plein  $E_N$ , en sont présentés dans le chapitre 3 mais ne concernent encore que le cas rang 1.

### Première application : une nouvelle preuve de l'additivité de la $R$ -transformée

Une autre question que nous pose la proposition I.2.1 est de savoir ce qu'on peut tirer de l'apparition de la  $R$ -transformée comme limite de l'intégrale sphérique. Tout d'abord, cela a des répercussions heuristiques : on a dit plus haut que la  $R$ -transformée était d'une certaine manière

l'analogue du logarithme de la transformée de Fourier dans le contexte libre. Les résultats que nous avons cités plus haut corroborent cette vision en exhibant un objet dont la  $R$ -transformée (ou plus précisément la primitive de la  $R$ -transformée) est asymptotiquement le logarithme de la transformée de Fourier, confortant aussi la motivation initiale — semble-t-il — d'Harish Chandra à étudier ces objets (cf. [41], [42], [43]).

Plus concrètement, cela nous fournit une nouvelle preuve de l'additivité de la  $R$ -transformée par convolution libre, indépendante et différente des deux preuves « classiques ». Si la preuve n'est pas si simple (se reporter au chapitre 2), le schéma en tous cas en est assez limpide et nous l'esquisons maintenant.

Grâce aux résultats de liberté asymptotique de D. Voiculescu (nous utiliserons une variante du théorème I.2.3 pour les matrices unitaires), on approche  $\mu_A \boxplus \mu_B$  par la mesure spectrale de  $A_N + V_N B_N V_N^*$ , avec  $V_N$  distribuée selon la mesure de Haar. On utilise ensuite un résultat de concentration pour la mesure de Haar, à savoir que presque sûrement

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \log \int e^{N\theta(U(A_N + V_N B_N V_N^*)U^*)_{11}} dm_N(U) - \int \frac{1}{N} \log \int e^{N\theta(UA_N U^* + UV_N B_N V_N^* U^*)_{11}} dm_N(U) dm_N(V_N) \right) = 0$$

puis on conclut la preuve en montrant que

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \int \frac{1}{N} \log \int e^{N\theta(U(A_N + V_N B_N V_N^*)U^*)_{11}} dm_N(U) dm_N(V_N) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \int e^{N\theta(UA_N U^*)_{11}} dm_N(U) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \int e^{N\theta(UB_N U^*)_{11}} dm_N(U), \quad (\text{I.18}) \end{aligned}$$

La démonstration de l'égalité (I.18) va demander un peu d'efforts mais formellement elle se réduit à montrer qu'on peut intervertir un logarithme et une intégrale i.e.

$$\begin{aligned} & \int \left( \frac{1}{N} \log \int e^{N\theta(UA_N U^* + UV_N B_N V_N^* U^*)_{11}} dm_N(U) \right) dm_N(V_N) \\ & \sim \frac{1}{N} \log \iint e^{N\theta(UA_N U^* + UV_N B_N V_N^* U^*)_{11}} dm_N(U) dm_N(V_N), \end{aligned}$$

puis que le membre de droite se comporte comme une somme, à cause de l'invariance de la mesure de Haar par multiplication.

## Deuxième application : grandes déviations et convergence de la plus grande valeur propre

Un autre problème dans lequel le comportement de l'intégrale sphérique dans ces asymptotiques intervient de manière cruciale est celui de l'étude des plus grandes valeurs propres d'une matrice de la forme  $X_N = W_N + A_N$ , avec  $W_N$  une matrice gaussienne (symétrique réelle) et  $A_N$  une matrice déterministe de rang fini (borné uniformément en  $N$ ).

La source de ce type de questionnement est à la fois théorique et pratique. D'une part, il s'inscrit dans le cadre plus large des questions sur l'universalité des lois qui apparaissent dans la théorie des matrices aléatoires. L'idée générale est qu'on connaît la distribution limite de la plus grande

valeur propre pour une matrice gaussienne  $W_N$  après un bon changement d'échelle (c'est la loi de Tracy-Widom). On se demande alors si celle-ci change lorsqu'on perturbe  $W_N$  de telle ou telle manière, par exemple en lui ajoutant une matrice de rang fini. D'autre part, si des résultats très complets ont été établis (par exemple dans [63] ou [5]) dans le cas où  $W_N$  est gaussienne hermitienne, par des techniques propres au cas complexe, il semble que c'est le cas symétrique réel qui est pertinent dans la plupart des problèmes pratiques dans lesquels ce type de matrices apparaît.

La loi jointe des valeurs propres de  $X_N$  s'écrit

$$\mathbb{Q}_N^A(dx_1, \dots, dx_N) = \frac{1}{Z_N^A} e^{-\frac{N}{2} \text{tr} A_N^2} \prod_{i < j} |x_i - x_j| I_N(\text{diag}(x_1, \dots, x_N), A_N) e^{-\frac{N}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2} dx_1 \dots dx_N,$$

où  $Z_N^A$  est la constante de normalisation *ad hoc*. On obtient le résultat suivant :

**Théorème I.2.9** *Lorsque  $A_N$  est de rang 1, la plus grande valeur propre  $x_N^*$  de  $X_N = W_N + A_N$  satisfait un principe de grandes déviations<sup>k</sup>, dans l'échelle  $N$ .*

La démonstration de ce PGD est l'objet du chapitre 3 et nécessite notamment l'étude précise de la continuité de l'intégrale sphérique en la mesure empirique et la plus grande valeur propre de la matrice de rang plein.

Mentionnons pour finir un corollaire important de ce PGD :

**Corollaire I.2.10** *Si l'unique valeur propre non nulle de  $A_N$  dépasse une valeur critique  $\theta_c := 1/\sqrt{2}$ , la plus grande valeur propre  $x_N^*$  de  $W_N + A_N$  se sépare du support de la mesure limite, c'est-à-dire converge vers une quantité  $x^*$  strictement plus grande que  $\sqrt{2}$ .*

Comme nous l'avons évoqué plus haut, des résultats très complets ont été obtenus dans le cas où  $W_N$  est une matrice gaussienne *hermitienne*, par exemple dans [63] ou [5], et notre objectif pour l'avenir est de transposer autant que possible ce type de résultats au cas symétrique réel, en particulier de généraliser le PGD obtenu en rang 1 dans le théorème I.2.9 ci-dessus à tout rang fini (on devrait en particulier établir que si  $k$  valeurs propres de  $A_N$  dépassent une valeur critique, les  $k$  plus grandes valeurs de  $X_N$  se détachent du support) ainsi que d'explorer les applications de ce phénomène, qui ont l'air nombreuses en théorie de l'apprentissage et en finance notamment.

---

<sup>k</sup> différent de celui qu'on obtient pour la plus grande valeur propre de  $W_N$  tout seul

There are in the world optimists who feel that any symbol that starts off with an integral sign must necessarily denote something that will have every property that they should like an integral to possess. This of course is quite annoying to us rigorous mathematicians; what is even more annoying is that, by doing so, they often come up with the right answer.

E.J. McSHANE

# Chapitre 1

## Character expansion method for the first order asymptotics of a matrix integral

Ce chapitre est tiré de l'article [37], écrit en collaboration avec A. Guionnet et accepté pour publication dans *Probability Theory and Related Fields*.

### Abstract

The estimation of various matrix integrals as the size of the matrices goes to infinity is motivated by theoretical physics, geometry and free probability questions. On a rigorous ground, only integrals of one matrix or of several matrices with simple quadratic interaction (called  $AB$  interaction) could be evaluated so far (see e.g. [60], [58] or [34]). Hereafter, we follow an idea widely developed in the physics literature, which is based on character expansion, to study more complex interaction. In this context, we derive a large deviation principle for the empirical measure of Young tableaux. We then use it to study a matrix model defined in the spirit of the 'dually weighted graph model' introduced in [51], but with a cutoff function such that the matrix integral and its character expansion converge. We prove that the free energy of this model converges as the size of the matrices goes to infinity and study the saddle points of the limit.

### 1.1 Introduction

In the present chapter, we show how the idea of character expansion — which was introduced by A. Migdal in [61] and by C. Itzykson and J.-B. Zuber in their famous article on planar approximation [46], and then widely developed in the 90's by various physicists (see for example [22], [52] for the so-called  $ABAB$  model or refer to [50] for a review) — can be used to estimate rigorously the specific matrix integral in which,  $A_N$  and  $B_N$  being two  $N \times N$  given Hermitian matrices, the partition function is

$$\begin{aligned} Z_N(\Phi) &\equiv \int dM e^{-\frac{N}{2} \operatorname{tr} M^2 - \operatorname{tr} \otimes \operatorname{tr} \log(I \otimes I - B_N \otimes \Phi(M) A_N)}, \\ &= \int dM e^{-\frac{N}{2} \operatorname{tr} M^2 + \sum_{k \geq 1} k^{-1} \operatorname{tr}(B_N^k) \operatorname{tr}((\Phi(M) A_N)^k)} \end{aligned} \tag{1.1}$$

with the following notations :

- $dM$  is the Lebesgue measure over the set  $\mathcal{H}_N$  of Hermitian matrices of size  $N$ ,
- $\text{tr}$  is the usual trace on  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  and  $I$  is the identity in  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ ,
- $\Phi$  is a continuous function from  $\mathbb{R}$  into  $\mathbb{R}$ .  $\Phi(M)$  is then uniquely defined by  $\Phi(M) = U \text{diag}(\Phi(\lambda_1), \dots, \Phi(\lambda_N)) U^*$  when  $M = U \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N) U^*$  for some  $U \in \mathcal{U}_N(\mathbb{C})$ .

This model was studied in the case where  $\Phi(x) = x$  in [51] where it was called the “dually weighted graphs model”, because it describes, in the large  $N$  limit, planar graphs having arbitrary coordination dependent weights for both vertices and faces. Note that in fact, in the case where  $\Phi(x) = x$ , the expansion is diverging (see [51], (2.7)). In this work, we shall restrict ourselves to functions  $\Phi$  satisfying appropriate boundedness conditions to insure that the partition function  $Z_N(\Phi)$  and its character expansion are well defined. We discuss in section 1.6 the relation between our result, [51] and the enumeration of maps. Our main results can be sketched as follows

**Theorem 1.1.1** 1. *Under appropriate assumptions (see Hypotheses 1.2.1, 1.4.2),*

$$F_N(\Phi) = \frac{1}{N^2} \log Z_N(\Phi)$$

*converges as  $N$  goes to infinity and a formula is derived (see Theorem 1.4.3 for details).*

2. *Under appropriate additional assumptions, we can give a weak characterization of the limit points of the spectral measure of  $M$  under the Gibbs measure associated to  $Z_N(\Phi)$  (see Proposition 1.5.1)*

The main advantage of this model is that its character expansion is not signed (i.e. is a sum of non negative terms), allowing standard Laplace method techniques. But let us explain what we mean by “character expansion”, i.e. expansion in terms of Schur polynomials. For that, we recall the following notions (see for example section 4.4. of the book [67] for more details) :

**Definition-Notation 1.1.2**

- a Young shape  $\lambda$  is a finite sequence of non-negative integers  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$  written in non-increasing order. One should think of it as a diagram whose  $i$ th line is made of  $\lambda_i$  empty boxes. We denote by  $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$  the total number of boxes of the shape  $\lambda$ .  
In the sequel, when we have a shape  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  and an integer  $N$  greater than the number of lines of  $\lambda$  having a strictly positive length, we will define a sequence  $\ell$  associated to  $\lambda$  and  $N$ , which is an  $N$ -uple of integers  $\ell_i = \lambda_i + N - i$ . In particular we have that  $\ell_1 > \ell_2 > \dots > \ell_N \geq 0$  and  $\ell_i - \ell_{i+1} \geq 1$ .
- for some fixed  $N \in \mathbb{N}$ , a Young tableau will be any filling of the Young shape above with integers from 1 to  $N$  which is non-decreasing on each line and (strictly) increasing on each column. For each such filling, we define the content of a Young tableau as the  $N$ -uple  $(\mu_1, \dots, \mu_N)$  where  $\mu_i$  is the number of  $i$ 's written in the tableau.  
Notice that, for  $N \in \mathbb{N}$ , a Young shape can be filled with integers from 1 to  $N$  if and only if  $\lambda_i = 0$  for  $i > N$ .
- for a Young shape  $\lambda$  and an integer  $N$ , the Schur polynomial  $s_\lambda$  is an element of  $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_N \rangle$  defined by

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_N) = \sum_T x_1^{\mu_1} \dots x_N^{\mu_N}, \tag{1.2}$$

where the sum is taken over all Young tableaux  $T$  of fixed shape  $\lambda$  and  $(\mu_1, \dots, \mu_N)$  is the content of  $T$ . Note that  $s_\lambda$  is positive whenever the  $x_i$ 's are and, although it is not obvious from this definition (cf for example [67] for a proof),  $s_\lambda$  is a symmetric function of the  $x_i$ 's.



If  $A$  is a matrix in  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ , then define  $s_\lambda(A) \equiv s_\lambda(A_1, \dots, A_N)$ , where the  $A_i$ 's are the eigenvalues of  $A$ .

Now the point is that we shall see in Theorem 1.2.2, whose derivation is the object of section 1.2, that we can write  $Z_N(\Phi)$  as

$$Z_N(\Phi) = c_N \sum_{\lambda} s_\lambda(A_N) s_\lambda(B_N) Z_N(\Phi, \lambda)$$

where the sum runs over Young tableaux  $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \cdots \geq \lambda_N)$  and  $Z_N(\Phi, \lambda)$  is a positive function of the shape  $\lambda$  which depends 'almost continuously' on the empirical measure

$$\hat{\mu}_\lambda^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\frac{\lambda_i + N - i}{N}} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$$

where  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$  denotes the set of probability measures on  $\mathbb{R}^+$ . Therefore, to study the asymptotic behaviour of  $Z_N(\Phi)$  we are lead to estimate the deviations of more general measures  $\Pi_N$  which shall depend on a sequence  $(F, c, (A_N, B_N)_{N \geq 0}, a, b)$  satisfying

- Hypothesis 1.1.3**
1.  $F$  is a bounded continuous function from  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$  equipped with its usual weak topology into  $\mathbb{R}$ .
  2.  $c : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  is a continuous function such that  $\liminf_{x \rightarrow +\infty} x^{-1} c(x) > 0$ .
  3.  $(A_N, B_N)_{N \geq 0}$  is a sequence of matrices with eigenvalues taking their values in  $[\varepsilon, 1]$  for some  $\varepsilon > 0$  and such that the spectral measures of  $A_N$  and  $B_N$  converge towards  $\mu_A$  and  $\mu_B$  respectively.
  4.  $a, b$  are two non-negative real numbers.

We then consider the non-negative measure  $\Pi^N$  on  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$  given, for any measurable subset  $M \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ , by

$$\Pi^N(M) = \sum_{\lambda} 1_{\hat{\mu}_\lambda^N \in M} s_\lambda(A_N)^a s_\lambda(B_N)^b e^{N^2 F(\hat{\mu}_\lambda^N) - N^2 \int c(x) d\hat{\mu}_\lambda^N(x)}. \quad (1.3)$$

We shall obtain large deviation bounds for  $(\Pi^N)_{N \in \mathbb{N}}$  with rate function described as follows.

**Definition-Notation 1.1.4**

- Let  $\mathcal{L}$  be the subset of  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$  given by

$$\mathcal{L} := \left\{ \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) : d\nu(x) \ll dx, \quad \frac{d\nu(x)}{dx} \leq 1 \right\} \quad (1.4)$$

- Let, for  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ,  $\Sigma$  be the non-commutative entropy

$$\Sigma(\mu) = \iint \log |x - y| d\mu(x) d\mu(y).$$

- $S(\mu) = \iint \log(s(x, y)) d\mu(x) d\mu(y)$ , with

$$s(x, y) = \int_0^1 (\alpha x + (1 - \alpha)y)^{-1} d\alpha \text{ if } x \neq y, \quad s(x, x) = x^{-1}. \quad (1.5)$$

- For  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  and any measurable function  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , we denote by  $f_{\#}\mu$  the probability measure such that, for any bounded measurable function  $g$  on  $\mathbb{R}$ ,  $f_{\#}\mu(g) = \int g(f(x))d\mu(x)$ .
- We then define  $H : \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) \rightarrow \mathbb{R}$  infinite-valued on  $\mathcal{L}^c$  and otherwise given by

$$H(\nu) = \int c(x)d\nu(x) - \frac{a+b}{2}\Sigma(\nu) - F(\nu) - aI(\log_{\#}\mu_A, \nu) - bI(\log_{\#}\mu_B, \nu) - \frac{a}{2}S(\mu_A) - \frac{b}{2}S(\mu_B),$$

where  $I$  is the limit of spherical integrals in a sense that will be properly settled in subsection 1.3.2.

One of our main results is the following :

**Theorem 1.1.5** *Let  $(F, c, (A_N, B_N)_{N \geq 0}, a, b)$  satisfying Hypothesis 1.1.3.  $(\Pi^N)_{N \geq 0}$  satisfies large deviation bounds with rate function  $H$  defined in 1.1.4. More precisely,*

1.  $H$  has compactly supported level sets, i.e  $\{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) : H(\nu) \leq M\}$  is compact for all  $M < \infty$ .
2. For any closed set  $F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \Pi^N(F) \leq -\inf\{H(\nu), \nu \in F\}$$

3. For any open set  $O \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \Pi^N(O) \geq -\inf\{H(\nu), \nu \in O\}$$

In particular,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \Pi^N(\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)) = -\inf\{H(\nu)\}$$

and the infimum is achieved.

Theorem 1.4.3 would be a direct consequence of Theorem 1.1.5 according to (1.8) (with  $a = b = 1$  and  $\log Z_N(\Phi, \lambda) = N^2 F(\hat{\mu}_\lambda^N) - N^2 \int c(x) d\hat{\mu}_\lambda^N(x)$ ) if  $Z_N(\Phi, \lambda)$  was indeed a continuous function of  $\hat{\mu}_\lambda^N$  and decayed sufficiently fast as the size of the tableau goes to infinity. Although it is not exactly the case, most of the technicalities are already contained in the proof Theorem 1.1.5, which, as we shall see in section 1.6, is of independent interest. The proof of Theorem 1.1.5 relies on techniques developed in [8] in a continuous setting, the relation of Schur functions with spherical integrals (see section 1.2) and on [38] where the asymptotics of such integrals were obtained. However, the proof remains rather technical for various reasons, the most severe being that we need to define the spherical integrals in a broader set than what was studied in [38]. In section 1.3, we prove Theorem 1.1.5 in details. We precise the strategy used to show Theorem 1.1.5 at the beginning of section 1.3, just after the precise statement of the theorem. We outline how to adapt the proofs to obtain Theorem 1.4.3 in section 1.4. Section 1.5 is devoted to the study of the minimizers of the rate function associated with the asymptotics of  $Z_N(\Phi)$ . They are reminiscent of [51] since they are described in terms of an additional measure describing the optimal shape of the Young tableau. They involve also, following [34] and [57], the solutions of an Euler equation for isentropic flow with negative pressure  $p(\rho) = -\frac{\pi^2}{3}\rho^3$ .

Finally, we comment our result, give other applications of our techniques, and their relations with the problem of the enumeration of maps in section 1.6.

## 1.2 Formulation of the matrix model as a sum over characters

Before going into the details of the large deviation principles we have announced in the introduction, we devote this section to show the character expansion for  $Z_N(\Phi)$  (see Theorem 1.2.2). This will be useful in section 1.4 and can also be seen as a justification for the definition of  $\Pi^N$  we introduced above and therefore as a motivation to prove such a result like Theorem 1.1.5.

Since we shall later also be interested by the Gibbs measure associated with such a model we more generally define, after (1.1), if  $X$  is a measurable subset of  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$

$$Z_N(\Phi)(X) \equiv \int_{\hat{\mu}_M^N \in X} dM e^{-\frac{N}{2} \text{tr} M^2 - \text{tr} \otimes \text{tr} \log(I \otimes I - B_N \otimes \Phi(M) A_N)}, \quad (1.6)$$

where, for an Hermitian matrix  $M \in \mathcal{H}_N(\mathbb{C})$  with eigenvalues  $(M_1, \dots, M_N) \in \mathbb{R}^N$ , we shall denote  $\hat{\mu}_M^N$  the spectral measure of  $M$  given by

$$\hat{\mu}_M^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{M_i}.$$

$\hat{\mu}_M^N$  is an element of the space  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  of probability measures on the real line. We endow  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  with its usual weak topology (i.e  $\mu_n \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  converges towards  $\mu$  iff  $\mu_n(f) = \int f d\mu_n$  converges to  $\mu(f)$  for all  $f$  in the space  $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$  of bounded continuous functions).

We shall assume that

### Hypothesis 1.2.1

1. If  $\|\cdot\|_N$  denotes the operator norm in  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ ,  $\sup_{N \in \mathbb{N}} \|A_N\|_N$  and  $\sup_{N \in \mathbb{N}} \|B_N\|_N$  are finite and  $\Phi$  is bounded. Without loss of generality, we will assume hereafter that

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \|A_N\|_N \leq 1, \quad \sup_{N \in \mathbb{N}} \|B_N\|_N \leq 1$$

2. For all  $N \in \mathbb{N}$ ,  $A_N$  and  $B_N$  have positive eigenvalues and  $\Phi$  takes its value in  $\mathbb{R}^+$ .
3. If we define  $\rho_\Phi := -\log \|\Phi\|_\infty$ , we assume that

$$e^{-\rho_\Phi} := \|\Phi\|_\infty < 1. \quad (1.7)$$

Note that this assumption insures that for each  $N$ ,  $I \otimes I - B_N \otimes \Phi(M) A_N$  has positive eigenvalues, so that its logarithm is well defined and  $\text{tr} \otimes \text{tr} \log(I \otimes I - B_N \otimes \Phi(M) A_N)$  is bounded so that the partition function itself is well defined.

The goal of this section is to express the partition function  $Z_N(\Phi)(X)$  in terms of spherical integrals, where a spherical integral  $I_N$  over the unitary group is given, for two real diagonal matrices  $D_N, E_N$ , by

$$I_N(D_N, E_N) := \int \exp\{N \text{tr}(U D_N U^* E_N)\} dm_N(U),$$

where  $m_N$  denotes the probability Haar measure on the unitary group  $\mathcal{U}_N$ . In the sequel, we will denote  $\Delta$  the VanderMonde determinant given, for any diagonal matrix  $A_N = \text{diag}(a_1, \dots, a_N)$ , by  $\Delta(A_N) = \Delta(a) = \prod_{i < j} |a_i - a_j|$ .

The main result of this section is

**Theorem 1.2.2** *When Hypothesis 1.2.1 is satisfied, we have that*

$$Z_N(\Phi)(X) = c_N \sum_{\lambda} s_{\lambda}(A_N) s_{\lambda}(B_N) Z_N(\Phi, \lambda)(X) \quad (1.8)$$

where :

- $U_N$  is the unitary group of dimension  $N$ ,
- the sum holds over all Young shapes,
- $s_{\lambda}$  is the Schur polynomial corresponding to a Young shape  $\lambda$ ,

$$- Z_N(\Phi, \lambda)(X) = \int_{\hat{\mu}_M^N \in X} I_N \left( \log \Phi(M), \frac{\ell}{N} \right) \frac{\Delta(\log \Phi(M))}{\Delta(\Phi(M))} \Delta(M)^2 e^{-\frac{N}{2} \sum_{i=1}^N M_i^2} \prod_{i=1}^N dM_i,$$

where  $\ell$  is the sequence associated to  $\lambda$  and  $N$ ,

- $c_N$  is a constant which only depends on  $N$ , equal to  $\frac{(2\pi N)^{\frac{N(N+1)}{2}}}{N!}$ .

Denoting  $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ , we can rewrite (1.8) into

$$Z_N(\Phi)(X) = c_N \sum_{\lambda} s_{\lambda}(A_N) s_{\lambda}(B_N) Z_N(\Psi, \lambda)(X) e^{-\rho_{\Phi} |\lambda|} \quad (1.9)$$

where  $\Psi = (\|\Phi\|_{\infty})^{-1} \Phi$ .

**Proof.**

1. *Expansion along Young tableaux*

By definition, if  $(B_{N,i})_{1 \leq i \leq N}$  and  $((\Phi(M)A_N)_i)_{1 \leq i \leq N}$  are respectively the eigenvalues of  $B_N$  and  $\Phi(M)A_N$ , we can rewrite :

$$e^{-\text{tr} \otimes \text{tr} \log(I \otimes I - B_N \otimes \Phi(M)A_N)} = \prod_{i,j=1}^N \frac{1}{1 - B_{N,i}(\Phi(M)A_N)_j}, \quad (1.10)$$

where condition (1.7) ensures the existence of the right hand side.

The Cauchy formula (for a reference and a proof, see for example formula 4.8.4 in the book of Sagan [67]) gives us that

$$\prod_{i,j=1}^N \frac{1}{1 - B_{N,i}(\Phi(M)A_N)_j} = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(B_N) s_{\lambda}(\Phi(M)A_N), \quad (1.11)$$

where  $\lambda$  is the shape of a Young tableau and  $s_{\lambda}$  is the Schur polynomial corresponding to this shape.

Note that  $s_{\lambda}(B_N) \geq 0$  since  $B_N \geq 0$  as well as  $s_{\lambda}(\Phi(M)A_N) = s_{\lambda}(A_N^{\frac{1}{2}} \Phi(M) A_N^{\frac{1}{2}}) \geq 0$ . Hence, we can use Fubini's theorem to write our partition function

$$Z_N(\Phi)(X) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(B_N) \int_{\hat{\mu}_M^N \in X} e^{-\frac{N}{2} \text{tr} M^2} s_{\lambda}(\Phi(M)A_N) dM. \quad (1.12)$$

## 2. Formulating $Z_N(\Phi)(X)$ in terms of Schur polynomials

It is useful to recall now the result of Weyl which establishes that  $s_\lambda$  coincides with the character of the unitary group associated to the shape  $\lambda$  (this is contained in theorem 7.5.B of [79]). This allows us to apply to our  $s_\lambda$ 's a key fact about characters : the well known property of orthogonality. More precisely, if  $V$  and  $W$  are two unitary matrices of size  $N$ , this property reads, for any shape  $\lambda$ ,

$$\int s_\lambda(UVU^*W)dm_N(U) = \frac{1}{d_\lambda}s_\lambda(V)s_\lambda(W), \quad (1.13)$$

where  $dm_N$  is the probability Haar measure on the unitary group  $\mathcal{U}_N$  and  $d_\lambda = s_\lambda(1, 1, \dots, 1)$ . Its explicit form is

$$d_\lambda = \frac{\Delta(\ell)}{\prod_{i=1}^{N-1} i!}, \quad (1.14)$$

with  $\ell = \text{diag}(\ell_1, \dots, \ell_N)$  where we recall that  $\ell_i = \lambda_i + N - i$ .

A proof of formula (1.13) can be easily deduced from proposition II.4.2 of [13] (see also exercise 3 p.84 therein) whereas the explicit expression of  $d_\lambda$  given in (1.14) appears in [79].

As a consequence, with the notations introduced above,

$$\int s_\lambda(U\Phi(M)U^*A_N)dm_N(U) = \frac{1}{d_\lambda}s_\lambda(\Phi(M))s_\lambda(A_N). \quad (1.15)$$

Combining equations (1.12) and (1.15), since  $dM$  is invariant under the action of the unitary group, we can rewrite our partition function

$$Z_N(\Phi)(X) = c'_N \sum_\lambda \frac{1}{d_\lambda} s_\lambda(A_N) s_\lambda(B_N) \int_{\mu_M^N \in X} s_\lambda(\Phi(M)) e^{-\frac{N}{2} \text{tr} M^2} \Delta(M)^2 \prod_{i=1}^N dM_i, \quad (1.16)$$

where  $\prod_{i=1}^N dM_i$  is the product Lebesgue measure on  $\mathbb{R}^N$  and  $c'_N$  some normalizing constant, only depending on  $N$ .

## 3. Relation between Schur polynomials and spherical integrals

We can now recall the following determinantal formula for  $s_\lambda$ , that can be found for example in corollary 4.6.2 of [67] :

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\det(x_i^{\ell_j})_{i,j}}{\Delta(\mathbf{x})}, \quad (1.17)$$

where  $\Delta$  is the VanderMonde determinant,  $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq N}$  and  $\ell$  is the tableau associated to  $\lambda$  (that is to say  $\ell_j = \lambda_j + N - j$  for  $1 \leq j \leq N$ ).

We then use a formula due to Harish-Chandra (see [59]) : if  $C_N$  and  $D_N$  are two  $N \times N$  matrices whose eigenvalues  $C_N(i)$  and  $D_N(j)$  are distinct, we have that

$$I_N(C_N, D_N) = \frac{\det(\exp NC_N(i)D_N(j))_{i,j}}{\Delta(C_N)\Delta(D_N)}. \quad (1.18)$$

This last equation together with the determinantal formula (1.17) allows us to rewrite for any  $M \in \mathcal{H}_N$  with non-negative distinct eigenvalues :

$$s_\lambda(M) = I_N \left( \log M, \frac{\ell}{N} \right) \Delta \left( \frac{\ell}{N} \right) \frac{\Delta(\log M)}{\Delta(M)}, \quad (1.19)$$

Note that under the measure  $e^{-\frac{N}{2} \text{tr} M^2} dM$ , the eigenvalues of the matrix  $M$  are almost surely distinct, and therefore so are the eigenvalues of the two matrices  $\Phi(M)$  and  $\log \Phi(M)$  by Hypothesis 1.2.1.3. Note however that (1.19) extends readily to any non-negative matrix by extending by continuity the definition

$$\frac{\Delta(\log M)}{\Delta(M)} = e^{\sum_{i < j} s(\lambda_i, \lambda_j)},$$

with  $s$  as defined in (1.5).

From (1.19), we conclude that there exists a constant  $c_N$  depending only on  $N$  such that,

$$\begin{aligned} Z_N(\Phi)(X) &= c_N \sum_{\lambda} s_\lambda(A_N) s_\lambda(B_N) \\ &\quad \times \int_{\hat{\mu}_M^N \in X} I_N \left( \log \Phi(M), \frac{\ell}{N} \right) \frac{\Delta(\log \Phi(M))}{\Delta(\Phi(M))} \Delta(M)^2 e^{-\frac{N}{2} \sum_{i=1}^N M_i^2} \prod_{i=1}^N dM_i, \end{aligned}$$

which completes the proof of Theorem 1.2.2 except from formula (1.9) which is easily obtained by dividing the  $\Phi$  by its norm before beginning the expansion.

It is also easy to deduce from equations (1.14), (1.16) and (1.19) above and from Selberg formula (see for example (25) in [8]) that we have indeed  $c_N = \frac{(2\pi N)^{\frac{N(N+1)}{2}}}{N!}$ .

■

### 1.3 Large deviations estimates for the empirical distribution of Young tableaux following the distribution $\Pi^N$

The object of this section is to prove Theorem 1.1.5.

Throughout this section, we fix  $(F, c, (A_N, B_N)_{N \geq 0}, a, b)$  satisfying Hypothesis 1.1.3.

From the definition (1.3) and following (1.19), we get that  $\Pi^N$  is the positive measure given, for any measurable subset  $M$  of  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ , by :

$$\begin{aligned} \Pi^N(M) &= e^{\frac{a}{2} N^2 S_N(\hat{\mu}_A^N) + \frac{b}{2} N^2 S_N(\hat{\mu}_B^N)} \\ &\quad \times \sum_{\lambda: \hat{\mu}_\lambda^N \in M} \Delta \left( \frac{\ell}{N} \right)^{a+b} I_N \left( \log A_N, \frac{\ell}{N} \right)^a I_N \left( \log B_N, \frac{\ell}{N} \right)^b e^{N^2 F(\hat{\mu}_\lambda^N) - N^2 \int c(x) d\hat{\mu}_\lambda^N(x)} \end{aligned}$$

where

$$e^{\frac{N^2}{2} S_N(\hat{\mu}_A^N)} := \frac{\Delta(\log(A_N))}{\Delta(A_N)}.$$

Let us denote, for any measurable subset  $M$  of  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ ,  $\tilde{\Pi}^N$  the non negative measure

$$\tilde{\Pi}^N(M) = \sum_{\lambda} 1_{\hat{\mu}_{\lambda}^N \in M} \Delta \left( \frac{\ell}{N} \right)^{a+b} I_N \left( \log A_N, \frac{\ell}{N} \right)^a I_N \left( \log B_N, \frac{\ell}{N} \right)^b e^{N^2 F(\hat{\mu}_{\lambda}^N) - N^2 \int c(x) d\hat{\mu}_{\lambda}^N(x)}.$$

We shall prove in this section a large deviation principle for  $(\tilde{\Pi}^N)_{N \in \mathbb{N}}$  with rate function  $\tilde{H}$  which, using the notations of Definition 1.1.4, is infinite on  $\mathcal{L}^c$  and otherwise given by

$$\tilde{H}(\nu) = \int c(x) d\nu(x) - \frac{a+b}{2} \Sigma(\nu) - F(\nu) - aI(\log_{\#} \mu_A, \nu) - bI(\log_{\#} \mu_B, \nu), \quad (1.20)$$

$I$  being in fact the limit of  $N^{-2} \log I_N$  whose existence and description is discussed in subsection 1.3.2.

**Theorem 1.3.1**  $(\tilde{\Pi}^N)_{N \geq 0}$  satisfies large deviation bounds with rate function  $\tilde{H}$ . More precisely,

1.  $\{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) : \tilde{H}(\nu) \leq M\}$  is compact for all  $M < \infty$ .
2. For any closed set  $F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ ,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \tilde{\Pi}^N(F) \leq - \inf \{ \tilde{H}(\nu), \nu \in F \}$$

3. For any open set  $O \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ ,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \tilde{\Pi}^N(O) \geq - \inf \{ \tilde{H}(\nu), \nu \in O \}$$

Theorem 1.1.5 is easily deduced from Theorem 1.3.1 since, with  $s$  defined in (1.5),

$$S_N(\hat{\mu}_A^N) = \frac{2}{N^2} \sum_{i < j} s(A_i, A_j). \quad (1.21)$$

Hence, since  $s$  is a bounded continuous function on  $[\varepsilon, 1]^2$ , we deduce (see Lemma 7.3.12 in [21]) that, as  $\hat{\mu}_A^N$  converges to  $\mu_A$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N(\hat{\mu}_A^N) = S(\mu_A)$$

and similarly for  $B_N$ .

The proof of Theorem 1.3.1 is heuristically simple since it amounts to perform a Laplace method and notice that the uniform measure on Young shape will not produce any entropy on the scale  $N^2$  (see Lemma 1.3.5). On a rigorous ground, it becomes a bit technical, for mainly the two following reasons :

- The distribution of  $\hat{\mu}_{\lambda}^N$  is discrete so that the arguments developed in [8] to obtain large deviation principles in similar scales and potentials have to be adapted. In particular, the discrete nature of the Young tableaux implies that  $\tilde{H}$  is infinite on  $\mathcal{L}^c$  (with  $\mathcal{L}$  as defined in Definition-Notation 1.1.4).
- More cumbersome is the fact that the natural space where the empirical measure of the Young tableaux lives is  $\mathcal{P}_1(\mathbb{R}^+) := \{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) : \int x d\nu(x) < \infty\}$ . Hence, all the limiting spherical integrals appearing are of the type  $I(\mu, \nu)$  with  $\mu$  in the set  $\mathcal{P}_{\infty}(\mathbb{R})$  of compactly supported probability measures but  $\nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^+)$ . Such limits were not proved to exist in [38] (where  $\nu(x^2) < \infty$  was assumed), the formula obtained in [38] is not valid, and continuity statements for  $I$  are lacking a priori.

The proof nevertheless follows the usual scheme :

1. In subsection 1.3.1 we study the rate function and prove that its level sets are compact.
2. In subsection 1.3.2 we show that the family of measures  $(\tilde{\Pi}^N)_{N \in \mathbb{N}}$  is exponentially tight. More precisely, if we let  $\mathcal{K}_L$  be the compact subset

$$\mathcal{K}_L = \left\{ \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) : \int x d\nu(x) \leq L \right\}$$

we prove that

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \tilde{\Pi}^N(\mathcal{K}_L^c) = -\infty.$$

3. In subsection 1.3.3 we prove the upper bound for arbitrarily small balls, i.e if  $d$  is a metric on  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  compatible with the weak topology such as the Dudley's metric  $d$  given by

$$d(\mu, \nu) = \sup \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|,$$

where the supremum is taken over all Lipschitz functions  $f$  with Lipschitz norm less than 1 (note that this distance is compatible with the weak topology), and if we set

$$B(\nu, \delta) = \{ \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+); d(\mu, \nu) < \delta \}$$

we show that for any  $\nu \in \cup_{L \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_L$ ,

$$\limsup_{\delta \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \tilde{\Pi}^N(B(\nu, \delta)) \leq -\tilde{H}(\nu).$$

4. In subsection 1.3.4 we prove the lower bound for arbitrarily small balls, i.e that for any  $\nu \in \cup_{L \in \mathbb{N}} \mathcal{K}_L$ ,

$$\liminf_{\delta \rightarrow \infty} \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \tilde{\Pi}^N(B(\nu, \delta)) \geq -\tilde{H}(\nu).$$

By Theorem 4.1.11 in [21], the above results prove Theorem 1.3.1.

### 1.3.1 Study of $\tilde{H}$

We begin this section by describing more precisely the function  $I$  as the limit of spherical integrals. Then, we show that  $\tilde{H}$  has compact level sets.

#### Definition and properties of $I$

Let us remind that it was proved in Theorem 1.1 of [38] that

$$I(\mu_D, \mu_E) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log I_N(D_N, E_N) \tag{1.22}$$

exists for all sequences of diagonal matrices  $(D_N, E_N)_{N \in \mathbb{N}}$  with spectral measures converging towards  $\mu_D$  and  $\mu_E$  respectively and such that  $\sup_N \|D_N\|_N$  and  $\sup_N \hat{\mu}_E^N(x^2)$  are finite. A formula for  $I$  is given in [38] when either  $\Sigma(\mu_E)$  or  $\Sigma(\mu_D)$  are finite. If they are not, the limit still exists since spherical integrals are uniformly continuous (see Lemma 1.3.2.4 below) and the measures with



finite  $\Sigma$  are dense, but its formula is far from being clear (see a discussion in [39]). However, let us remark that since the spherical integrals under consideration are always bounded, the rate function  $\tilde{H}(\nu)$  is infinite unless  $\nu$  has finite entropy  $\Sigma$  (see (1.33)) so that we can always use the formula given in [38] when  $\int x^2 d\nu(x) < \infty$ .

Since  $\tilde{H}(\nu)$  is infinite if  $\int x d\nu(x) = +\infty$  (see (1.32)) and  $\mu_A$  and  $\mu_B$  are supposed to be supported on  $[\varepsilon, 1]$ , it is enough to extend the definition of  $I(\mu, \nu)$  to compactly supported measures  $\mu$  with support in  $\mathbb{R}^-$  but  $\nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^+)$ . We shall prove

**Lemma 1.3.2** *Let  $R \in \mathbb{R}^+$  and  $\mu$  be a probability measure on  $[-R, 0]$  and  $\nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^+)$ . Then*

1. *Let  $\varphi_M(x) = x \wedge M$ .  $I(\mu, (\varphi_M)_\# \nu)$  is well defined and decreases towards a limit*

$$I(\mu, \nu) := \lim_{M \rightarrow \infty} I(\mu, (\varphi_M)_\# \nu).$$

*Moreover, for any  $M \geq 0$ ,*

$$I(\mu, (\varphi_M)_\# \nu) - R\nu(x - \varphi_M(x)) \leq I(\mu, \nu) \leq I(\mu, (\varphi_M)_\# \nu).$$

2. *Let  $\mathcal{P}^R(\mathbb{R}) = \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \mu([-R, R]^c) = 0\}$  and  $\mathcal{P}_q(\mathbb{R}^+) = \{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) : \mu(|x|^q) \leq R\}$ . Then there exists a function  $\kappa(\delta, R)$  such that for any  $R < \infty$ ,  $\kappa(\delta, R)$  goes to zero as  $\delta$  goes to zero and for any  $(\mu, \mu') \in \mathcal{P}^R(\mathbb{R})$  any  $(\nu, \nu') \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ , such that  $d(\mu, \mu') + d(\nu, \nu') < \delta$ ,*

$$|I(\mu, \nu) - I(\mu', \nu')| \leq \kappa(\delta, R).$$

3. *For any  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^-)$  and  $\nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^+)$ ,*

$$\mu(x)\nu(x) \leq I(\mu, \nu) \leq 0.$$

4. *For any sequence  $(D_N, E_N)$  of diagonal Hermitian matrices with  $D_N \leq 0$  and  $E_N \geq 0$ , for any  $M \in \mathbb{R}^+$ ,*

$$I_N(D_N, \varphi_M(E_N)) e^{-N\|D_N\|_N \operatorname{tr}(E_N - \varphi_M(E_N))} \leq I_N(D_N, E_N) \leq I_N(D_N, \varphi_M(E_N)). \quad (1.23)$$

*Moreover there exists a function  $g : [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ , depending on the limiting measures  $\mu_E, \mu_D$  only, such that  $g(\delta, M)$  goes to zero as  $\delta$  does for any  $M \in \mathbb{R}^+$ , and so that*

$$\left| \frac{1}{N^2} \log \frac{I_N(\hat{D}_N, \varphi_M(\hat{E}_N))}{I_N(D_N, \varphi_M(E_N))} \right| \leq g(\delta, M). \quad (1.24)$$

*for any  $N \in \mathbb{N}$  and any diagonal matrices  $(D_N, E_N, \hat{D}_N, \hat{E}_N)$  such that  $E_N, \hat{E}_N$  are non-negative and*

$$d(\hat{\mu}_{D_N}^N, \hat{\mu}_{\hat{D}_N}^N) + d(\hat{\mu}_{E_N}^N, \hat{\mu}_{\hat{E}_N}^N) < \delta, \quad \hat{\mu}_{E_N}^N(x^2) + \hat{\mu}_{\hat{E}_N}^N(x^2) \leq M.$$

**Proof.**

- We first prove the last point. If we denote  $D_N = \text{diag}(d_1, \dots, d_N)$  and  $E_N = \text{diag}(e_1, \dots, e_N)$ ,

$$\begin{aligned} I_N(D_N, E_N) &= \int e^{N \text{tr}(D_N U E_N U^*)} dm_N(U) \\ &= \int e^{N \sum_{i,j=1}^N d_i e_j |u_{ij}|^2} dm_N(U) \\ &\leq \int e^{N \sum_{i,j=1}^N d_i \varphi_M(e_j) |u_{ij}|^2} dm_N(U) \end{aligned}$$

where we used that  $d_i \leq 0$ . The opposite inequality of (1.23) is also trivial since

$$\begin{aligned} I_N(D_N, E_N) &\geq e^{N \|D_N\|_N \sum_{j=1}^N (e_j - \varphi_M(e_j))} \int e^{N \sum_{i,j=1}^N d_i \varphi_M(e_j) |u_{ij}|^2} dm_N(U) \\ &= e^{-N \|D_N\|_N \text{tr}(E_N - \varphi_M(E_N))} I_N(D_N, \varphi_M(E_N)) \end{aligned}$$

The continuity statement (1.24) is a direct consequence of Lemma 5.1 in [38] since  $\varphi_M(E_N)$  is uniformly bounded by  $M$  and  $d((\varphi_M)_\# \mu, (\varphi_M)_\# \mu') \leq d(\mu, \mu')$  for any  $\mu, \mu' \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

- We can now prove the first point. From (1.23), we deduce that for any  $M \in \mathbb{R}^+$ , any  $E_N \geq 0$  with spectral measure converging towards  $\mu_E$  and any sequence of bounded non-positive diagonal matrices  $D_N$  with spectral measure converging towards  $\mu_D$

$$\begin{aligned} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log I_N(D_N, E_N) &\leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log I_N(D_N, \varphi_M(E_N)) \\ &= I(\mu_D, (\varphi_M)_\# \mu_E), \end{aligned} \tag{1.25}$$

where the last equality comes from the observation that  $(\varphi_M(D_N), E_N)$  are uniformly bounded by hypothesis so that the convergence holds by Theorem 1.1 in [38]. With  $\mu_E = (\varphi_L)_\# \nu$  for some  $L \geq M$  and  $E_N$  chosen so that  $\hat{\mu}_{E_N}^N(|x| > L) = 0$ , the left hand side of (1.25) converges towards  $I(\mu_D, (\varphi_L)_\# \nu)$  showing that  $M \rightarrow I(\mu_D, (\varphi_M)_\# \mu_E)$  is non-increasing. Hence, it converges towards some limit (maybe infinite at this stage). Now, we choose a special sequence  $(E_N)_{N \in \mathbb{N}}$  such that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \text{tr}(E_N - \varphi_M(E_N)) = \mu_E(x - \varphi_M(x)).$$

We can construct it as follows; assume first that  $\mu_E$  has no atoms and set

$$\begin{aligned} E_{1,N} &= \inf \left\{ x / \mu_E((-\infty, x]) \geq \frac{1}{N+1} \right\} \\ E_{i+1,N} &= \inf \left\{ x \geq E_{i,N} / \mu_E((E_{i,N}, x]) \geq \frac{1}{N+1} \right\}. \end{aligned}$$

Then it is not hard to see that  $\hat{\mu}_{E_N}^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{E_{i,N}}$  converges towards  $\mu_E$ . Moreover,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{E_N}^N(x - \varphi_M(x)) &= \frac{1}{N} \sum_{E_{i,N} \geq M} (E_{i,N} - M) \\ &\leq \frac{N+1}{N} \sum_{E_{i,N} \geq M} (E_{i,N} - M) \mu_E([E_{i,N}, E_{i+1,N}]) \leq \frac{N+1}{N} \mu_E((x - M) 1_{x \geq M}). \end{aligned}$$

If  $\mu_E$  has atoms, we consider a finite collection of atoms  $\{a_1, \dots, a_K\}$  such that each of the remaining atoms has mass smaller than  $(N+1)^{-1}$ . Then,  $E_N$  has  $\lfloor N\mu_E(\{a_i\}) \rfloor$  eigenvalues equal to  $a_i$  for  $1 \leq i \leq K$ . The remaining eigenvalues are chosen as above.

Inequality (1.23) yields with this choice

$$\frac{1}{N^2} \log I_N(D_N, E_N) \geq I_N(D_N, \varphi_M(E_N)) e^{-N(N+1) \sup_N \|D_N\|_{N\mu_E}((x-M)1_{x \geq M})}$$

and therefore

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log I_N(D_N, E_N) \geq -\sup_N \|D_N\|_{N\mu_E}((x-M)1_{x \geq M}) + I(\mu_D, (\varphi_M) \# \mu_E) \quad (1.26)$$

(1.25) and (1.26) shows that for such a sequence

$$\begin{aligned} -\sup_N \|D_N\|_{N\mu_E}((x-M)1_{x \geq M}) + I(\mu_D, (\varphi_M) \# \mu_E) &\leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log I_N(D_N, E_N) \\ &\leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log I_N(D_N, E_N) \\ &\leq I(\mu_D, \mu_E) \end{aligned} \quad (1.27)$$

This completes the proof of the first point.

• The second point is a direct consequence of the fourth too. Indeed, let  $(\mu, \mu', \nu, \nu')$  be such that

$$d(\mu, \mu') + d(\nu, \nu') < \delta.$$

Then, we choose a sequence  $(D_N, E_N)$  (resp.  $(\hat{D}_N, \hat{E}_N)$ ) of matrices with spectral measure converging towards  $(\mu, \nu)$  (resp.  $(\mu', \nu')$ ) such that

$$\max\{d(\hat{\mu}_{D_N}^N, \mu), d(\hat{\mu}_{\hat{D}_N}^N, \mu'), d(\hat{\mu}_{E_N}^N, \nu), d(\hat{\mu}_{\hat{E}_N}^N, \nu')\} < \delta$$

which implies

$$d(\hat{\mu}_{D_N}^N, \hat{\mu}_{\hat{D}_N}^N) < 2\delta, \quad d(\hat{\mu}_{E_N}^N, \hat{\mu}_{\hat{E}_N}^N) < 2\delta$$

so that 4. implies, by taking the limit as  $N$  goes to infinity (here  $M = R$ ), that

$$|I(\mu, \nu) - I(\mu', \nu')| \leq g(2\delta, R).$$

• In point 3., the upper bound on  $I$  is trivial and the lower bound comes from Jensen's inequality which yields

$$\begin{aligned} I_N(D_N, E_N) &= \int e^{N \sum_{i,j=1}^N e_i d_j |u_{ij}|^2} dm_N(U) \\ &\geq e^{N \sum_{i,j=1}^N e_i d_j} \int |u_{ij}|^2 dm_N(U) \\ &= e^{\sum_{i,j=1}^N e_i d_j} = e^{N^2 \hat{\mu}_{E_N}^N(x) \hat{\mu}_{D_N}^N(x)} \end{aligned}$$

The result is then obtained by letting  $N$  go to infinity. ■

### $\tilde{H}$ has compact level sets

In this section, we prove Theorem 1.3.1.1 by proving first that  $\tilde{H}$  is lower semi-continuous and then that its level sets are compact.

•  $\tilde{H}$  is lower semi-continuous, i.e.  $\{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) : \tilde{H}(\nu) \leq M\}$  is closed for any  $M \in \mathbb{R}^+$ . We recall that  $\mathcal{L}$  is the set of probability measures which are absolutely continuous with respect to Lebesgue measure and with density bounded by one. If we introduce the function  $\hat{H}$  given by

$$\hat{H}(\nu) := \int c(x) d\nu(x) - \frac{a+b}{2} \Sigma(\nu) - F(\nu) - aI(\log_{\#} \mu_A, \nu) - bI(\log_{\#} \mu_B, \nu),$$

for all  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$  ( $\hat{H}$  coincides with  $\tilde{H}$  on  $\mathcal{L}$  but is not necessarily infinite outside  $\mathcal{L}$ ), then we have that  $\{\tilde{H} \leq M\} = \mathcal{L} \cap \{\hat{H} \leq M\}$ . We first check that  $\mathcal{L}$  is closed and then show that  $\hat{H}$  is lower semi-continuous, these two points proving that  $\{\tilde{H} \leq M\}$  is closed.

To show that  $\mathcal{L}$  is closed, take a sequence  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  of measures in  $\mathcal{L}$  converging weakly to a measure  $\nu$ . For any  $c$  and  $d$ , the function  $\mathbf{1}_{[c,d]}$  is upper semi-continuous so that

$$|d - c| \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \nu_n([c, d]) \geq \nu([c, d]).$$

so that  $\nu$  is in  $\mathcal{L}$ .

We now show that  $\hat{H}$  is a supremum of continuous functions which we define as follows : we let, with  $\varphi_M(x) = x \wedge M$  for  $M \geq 0$  as in Lemma 1.3.2, and for  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ ,

$$\hat{H}^M(\nu) := -aI(\log_{\#} \mu_A, (\varphi_M)_{\#} \nu) - bI(\log_{\#} \mu_B, (\varphi_M)_{\#} \nu) + \iint g(x, y) \wedge M d\nu(x) d\nu(y) - F(\nu)$$

with

$$g(x, y) = \left( \frac{a+b}{2} \right) \log |x - y|^{-1} + \frac{1}{2} c(x) + \frac{1}{2} c(y) \quad (1.28)$$

We claim that for any finite  $M$ ,  $\hat{H}^M$  is continuous on  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ . Indeed, by Lemma 1.3.2.2, for  $C = A$  or  $B$ ,  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) \mapsto I(\log_{\#} \mu_C, (\varphi_M)_{\#} \nu) \in \mathbb{R}$  is continuous since  $\log_{\#} \mu_C$  is compactly supported by Hypothesis 1.2.1.1. Moreover, it is not hard to check that  $g$  is bounded below and continuous except when on the diagonal  $\{x = y\}$  where it goes to infinity. Consequently,  $g \wedge M$  is a bounded continuous function on  $\mathbb{R}^2$ . Thus  $\mu \rightarrow \iint g(x, y) \wedge M d\mu(x) d\mu(y)$  is bounded continuous.

This last argument finishes to prove that  $\hat{H}^M$  is a continuous function on  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ . To deduce that  $\hat{H}$  is lower semi-continuous, it is therefore enough to prove that

$$\hat{H}(\nu) = \sup_{M \geq 0} \{\hat{H}^M(\nu)\}. \quad (1.29)$$

But this is straightforward since monotone convergence theorem asserts that for any  $f$  bounded below

$$\lim_{M \uparrow \infty} \iint f(x, y) \wedge M d\mu(x) d\mu(y) = \iint f(x, y) d\mu(x) d\mu(y)$$

and by Lemma 1.3.2.1,  $I(\mu, (\varphi_M)_{\#} \nu)$  decreases towards its limit  $I(\mu, \nu)$ .

• As a consequence of the last point, for any  $M \geq 0$ ,  $\{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) : \tilde{H}(\nu) \leq M\}$  is closed. We now check that it is compact by showing that it is contained in a compact set. In fact, by Lemma 1.3.2.3,

$$\tilde{H}(\nu) \geq \iint g(x, y) d\nu(x) d\nu(y) - \sup_{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)} F(\nu) \quad (1.30)$$

and it is not hard to check that, by Hypothesis 1.1.3.2, there exists a finite constant  $C$  and  $\rho > 0$  such that for any  $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$

$$g(x, y) \geq \frac{\rho}{2}x + \frac{\rho}{2}y + C \quad (1.31)$$

yielding with (1.30) that for any  $M \in \mathbb{R}^+$ , if  $C' = C - \sup_{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)} F(\nu)$ ,

$$\{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) : \tilde{H}(\nu) \leq M\} \subset \left\{ \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) : \int x d\nu(x) \leq \frac{2}{\rho}(M - C') \right\} := \mathcal{K}_{M, \rho}. \quad (1.32)$$

Since  $\mathcal{K}_{M, \rho}$  is a compact subset of  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ , the proof is completed.

Note that since  $\iint g(x, y) d\nu(x) d\nu(y) = \int c(x) d\nu(x) - \Sigma(\nu)$  and  $c$  is bounded below, we also see from (1.30) that there exists a finite constant  $L$  such that for all  $M \geq 0$

$$\{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) : \tilde{H}(\nu) \leq M\} \subset \{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) : \Sigma(\nu) \geq -M + L\}. \quad (1.33)$$

■

### 1.3.2 $\tilde{\Pi}^N$ is exponentially tight

The goal of this section is to prove that

**Lemma 1.3.3**  *$\tilde{\Pi}^N$  is exponentially tight, and more precisely if we set*

$$\mathcal{K}_L := \left\{ \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) : \int x d\nu(x) \leq L \right\},$$

then

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \tilde{\Pi}^N(\mathcal{K}_L^c) = -\infty.$$

**Proof.** Since the spherical integrals under consideration are uniformly bounded above by one and  $F$  is uniformly bounded by a constant  $\|F\|_\infty$ ,

$$\tilde{\Pi}^N(X) \leq e^{N^2 \|F\|_\infty} \sum_{\lambda: \hat{\mu}_\lambda^N \in X} e^{-N^2 \int_{x \neq y} g(x, y) d\hat{\mu}_\lambda^N(x) d\hat{\mu}_\lambda^N(y)},$$

Choosing  $X = \mathcal{K}_L^c$ , we get by (1.31) that

$$\tilde{\Pi}^N(\mathcal{K}_L^c) \leq e^{N^2 \|F\|_\infty + N^2 C} \sum_{\lambda} 1_{\hat{\mu}_\lambda^N \in \mathcal{K}_L^c} e^{-N^2 \rho \int x d\hat{\mu}_\lambda^N(x)} \Delta \left( \frac{\ell}{N} \right)^{a+b} \quad (1.34)$$

It remains to consider the sums over Young shapes. Let us recall that

$$\hat{\mu}_\lambda^N(x) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \ell_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \frac{\lambda_i}{N} - \frac{i}{N} \right) + 1 \leq N^{-2} |\lambda|_N + 1$$

where  $|\lambda|_N = \sum_{i \leq N} \lambda_i$ . Therefore, for any  $L \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda: \hat{\rho}_\lambda^N(x) \geq L} e^{-\rho|\lambda|} \Delta \left( \frac{\ell}{N} \right)^{a+b} &\leq \sum_{\lambda: |\lambda|_N \geq N^2(L-1)} e^{-\rho|\lambda|} \Delta \left( \frac{\ell}{N} \right)^{a+b} \\ &\leq e^{-\frac{1}{2}\rho N^2(L-1)} \sum_{\lambda: |\lambda|_N \geq N^2(L-1)} e^{-\frac{1}{2}\rho|\lambda|} \Delta \left( \frac{\ell}{N} \right)^{a+b}. \end{aligned}$$

For any  $j$ ,

$$\prod_{j < i} \left| \frac{\ell_i}{N} - \frac{\ell_j}{N} \right| \leq \left( \frac{\ell_j}{N} \right)^{N-j},$$

therefore, for any shape,

$$\Delta \left( \frac{\ell}{N} \right)^{a+b} e^{-\frac{1}{2}\rho|\lambda|} \leq e^{(a+b) \sum_j (N-j) \log \frac{\ell_j}{N} - \frac{1}{4} N \rho \frac{\ell_j}{N}} \leq e^{N^2 C''},$$

where  $C'' = \sup_x \left\{ (a+b) \log x - \frac{1}{4} \rho x \right\} - \frac{1}{8}$ .

Now the number of Young shapes  $\lambda$  such that  $|\lambda|_N = m$  is bounded by  $C_m^N$  so that we conclude

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda: |\lambda|_N \geq N^2(L-1)} e^{-\rho|\lambda|} \Delta \left( \frac{\ell}{N} \right)^{a+b} &\leq e^{N^2 C} e^{-\frac{1}{2}\rho N^2(L-1)} \frac{1}{N!} \sum_{m \geq N^2(L-1)} m(m-1) \cdots (m-N+1) e^{-\frac{1}{4}\rho m}, \\ &\leq e^{N^2 C} e^{-\frac{1}{2}\rho N^2(L-1)} \frac{1}{N!} \sum_{m \geq N^2(L-1)} e^{N \log m} e^{-\rho m} \\ &\leq e^{-\frac{1}{2}(\rho-\delta)N^2(L-1)} \end{aligned} \tag{1.35}$$

where in the last line  $\delta$  is any positive number and the inequality holds as soon as  $N$  and  $L$  are big enough. Equations (1.34) and (1.35) give Lemma 1.3.3. ■

### 1.3.3 $(\tilde{\Pi}^N)_{N \geq 0}$ satisfies a weak large deviation upper bound

In this section, we shall prove the following

**Lemma 1.3.4**  $\tilde{\Pi}^N$  satisfies a weak large deviation upper bound in the scale  $N^2$  with rate function  $\tilde{H}$  i.e for any  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ ,

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \tilde{\Pi}^N(B(\nu, \delta)) \leq -\tilde{H}(\nu). \tag{1.36}$$

**Proof.**

• We first prove that for any  $\varepsilon > 0$ , if  $\nu$  is such that there exists two positive real numbers  $\alpha$  and  $\beta$  ( $\alpha < \beta$ ) such that  $\nu([\alpha, \beta]) \geq (1 + \varepsilon)(\beta - \alpha)$ , then,

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \tilde{\Pi}^N(B(\nu, \delta)) = -\infty \tag{1.37}$$

which implies that for all  $\nu \in \mathcal{L}^c$ ,

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \tilde{\Pi}^N(B(\nu, \delta)) = -\infty. \quad (1.38)$$

The main remark is that, for any shape  $\lambda$ , as the  $\ell_i$  are (strictly) decreasing we have that, for any  $c < d$ ,

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_\lambda^N([c, d]) &= \frac{1}{N} \# \left\{ i : \frac{\ell_i}{N} \in [c, d] \right\} \leq \frac{1}{N} (\lfloor N(d-c) \rfloor + 1) \\ &\leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) (d-c), \end{aligned} \quad (1.39)$$

where the last inequality holds for  $N$  large enough.

Let be  $\eta > 0$  and consider the function  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < \alpha - \eta \text{ or } x > \beta + \eta, \\ 1, & \text{if } \alpha < x < \beta, \\ \eta^{-1}(x - \alpha + \eta), & \text{if } \alpha - \eta \leq x \leq \alpha, \\ \eta^{-1}(-x + \beta + \eta), & \text{if } \beta \leq x \leq \beta + \eta. \end{cases}$$

Note that the Lipschitz norm of  $f$  is bounded by  $\eta^{-1} \vee 1$ . We have, for any shape  $\lambda$ ,

$$\int f d\nu - \int f d\hat{\mu}_\lambda^N = \int_{\alpha-\eta}^{\alpha} f(d\nu - d\hat{\mu}_\lambda^N) + \int_{\beta}^{\beta+\eta} f(d\nu - d\hat{\mu}_\lambda^N) + \int_{\alpha}^{\beta} f(d\nu - d\hat{\mu}_\lambda^N).$$

Using (1.39), we get that, for any shape  $\lambda$  and  $N$  large enough,

$$\int_{\alpha-\eta}^{\alpha} f(d\nu - d\hat{\mu}_\lambda^N) \geq - \int_{\alpha-\eta}^{\alpha} f d\hat{\mu}_\lambda^N = -\frac{1}{\eta} \int_{\alpha-\eta}^{\alpha} \hat{\mu}_\lambda^N([\alpha - \eta, x]) dx \geq -(1 + \frac{\varepsilon}{2}) \frac{\eta}{2},$$

(and the same thing for  $\beta$ ) and that

$$\int_{\alpha}^{\beta} f d\nu - \int_{\alpha}^{\beta} f d\hat{\mu}_\lambda^N = \nu([\alpha, \beta]) - \hat{\mu}_\lambda^N([\alpha, \beta]) \geq \frac{\varepsilon}{2}(\beta - \alpha),$$

so that, if we choose  $\eta = \frac{\varepsilon}{4}(\beta - \alpha)$ , we get that

$$\int f d\nu - \int f d\hat{\mu}_\lambda^N \geq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{\varepsilon}{4}(\beta - \alpha).$$

Thus, since  $\int f d\nu - \int f d\hat{\mu}_\lambda^N \leq \eta^{-1} d(\hat{\mu}_\lambda^N, \nu)$ , we conclude that, if we take  $\delta < (1 - \frac{\varepsilon}{2}) \left[\frac{\varepsilon}{4}(\beta - \alpha)\right]^2$ , the set  $B(\nu, \delta) = \{\lambda : d(\hat{\mu}_\lambda^N, \nu) < \delta\}$  is empty for  $N$  large enough, which gives (1.37).

• We now take  $\nu \in \mathcal{L}$ . By lemma 1.3.2.4, for any  $M \in \mathbb{R}^+$ ,

$$\tilde{\Pi}^N(B(\nu, \delta)) \leq \sum_{\lambda: d(\hat{\mu}_\lambda^N, \nu) < \delta} I\left(A_N, \varphi_M \left(\frac{\ell}{N}\right)\right)^a I\left(B_N, \varphi_M \left(\frac{\ell}{N}\right)\right)^b \Delta\left(\frac{\ell}{N}\right)^{a+b} e^{-N^2 \int c(x) d\hat{\mu}_\lambda^N(x) + N^2 F(\hat{\mu}_\lambda^N)}$$

Observe that with  $g$  defined in (1.28), since  $|\lambda| = \sum \lambda_j = \sum \ell_j - \sum(N-j) = \sum \ell_j - 2^{-1}N(N-1)$ ,

$$\Delta\left(\frac{\ell}{N}\right)^{a+b} e^{-N^2 \int c(x) d\hat{\mu}_\lambda^N(x)} = e^{-N^2 \int_{y' \neq y} g(y', y) d\hat{\mu}_\lambda^N(y) d\hat{\mu}_\lambda^N(y') - N \int c(x) d\hat{\mu}_\lambda^N(x)},$$

we obtain

$$\begin{aligned}
\tilde{\Pi}^N(B(\nu, \delta)) &\leq \sum_{\lambda: d(\hat{\mu}_\lambda^N, \nu) < \delta} I\left(A_N, \varphi_M\left(\frac{\ell}{N}\right)\right)^a I\left(B_N, \varphi_M\left(\frac{\ell}{N}\right)\right)^b \\
&\quad \times e^{-N^2 \int_{y' \neq y} g(y', y) \wedge M d\hat{\mu}_\lambda^N(y) d\hat{\mu}_\lambda^N(y') + N^2 F(\hat{\mu}_\lambda^N) - N \int c(x) d\hat{\mu}_\lambda^N(x)} \\
&\leq e^{NM} \sum_{\lambda: d(\hat{\mu}_\lambda^N, \nu) < \delta} I\left(A_N, \varphi_M\left(\frac{\ell}{N}\right)\right)^a I\left(B_N, \varphi_M\left(\frac{\ell}{N}\right)\right)^b \\
&\quad \times e^{-N^2 \int g(y', y) \wedge M d\hat{\mu}_\lambda^N(y) d\hat{\mu}_\lambda^N(y') + N^2 F(\hat{\mu}_\lambda^N) - N \int c(x) d\hat{\mu}_\lambda^N(x)} \quad (1.40)
\end{aligned}$$

Now, following section 1.3.1, we know that all the functions appearing above are continuous for any finite  $M$  so that for each such  $M$  we find a  $\kappa(\delta, M)$  going to zero as  $\delta$  goes to zero so that

$$\tilde{\Pi}^N(B(\nu, \delta)) \leq e^{-N^2(\hat{H}^M(\nu) + \kappa(\delta, M))} e^{N(M+C)} \sum_{\lambda: d(\hat{\mu}_\lambda^N, \nu) < \delta} e^{-N \rho \int y d\hat{\mu}_\lambda^N(y)} \quad (1.41)$$

where we used again (1.31). By Lemma 1.3.5 stated below, the last entropy term will not contribute in the scale  $N^2$ .

By (1.41), and lemma 1.3.5 we conclude that, for all  $M \geq 0$ ,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \tilde{\Pi}^N(B(\nu, \delta)) \leq -\hat{H}^M(\nu) + \kappa(\delta, M).$$

Letting  $\delta$  going to zero and then  $M$  going to infinity (since we saw in section 1.3.1 that  $\hat{H}^M$  converges towards  $\hat{H}$ ) gives (1.36) in the case where  $\nu \in \mathcal{L}$ . This together with (1.38) finishes the proof of Lemma 1.3.4. ■

As announced above, we have now to prove :

**Lemma 1.3.5**

$$\frac{1}{N^2} \log \#\{\lambda / d(\hat{\mu}_\lambda^N, \nu) < \delta\} \rightarrow_{N \rightarrow \infty} 0,$$

**Proof.** We first show a lower bound for the number of tableaux  $\lambda$  whose empirical measure is such that, for a given  $\varepsilon > 0$  and a given  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ ,  $d(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\ell_j}, \nu) < \varepsilon$ .

As this number is an integer, we just need to show that this set is non-empty. This is true thanks to two facts : first the set  $\{\nu\}$  is tight so that we choose a convex compact  $K$  such that  $\nu(K) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{3}$  and then the set  $\mathcal{P}(K)$  of all probability measures on  $K$  endowed with the weak topology is a compact in the locally convex space of measures with mass less than 1, so that the Krein-Milman theorem tells us that  $\mathcal{P}(K)$  is the closure of the convex envelope of its extremal points, which are the Dirac measures. We have the approximation announced above : for  $\varepsilon > 0$ , there exists an integer  $N(\varepsilon)$  and some real number that we order  $a_{1, N(\varepsilon)} > a_{2, N(\varepsilon)} > \dots$  such that  $d(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{a_{j, N}}, \nu) < \frac{\varepsilon}{2}$ . Then for each  $j$  between 1 and  $N$ , we choose for  $\ell_j$  the integer for which  $\frac{\ell_j}{N}$  is the closest from  $a_{j, N}$ .



This gives us that, for  $N$  large enough

$$\# \left\{ \lambda/d \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{\frac{\ell_j}{N}}, \nu \right) < \varepsilon \right\} \geq 1.$$

For the upper bound, we first find a compactly supported measure  $\nu'$  (with support  $K = [0, M]$ ) such that  $d(\nu, \nu') < \frac{\varepsilon}{2}$ . This gives us that

$$\{\lambda/d(\hat{\mu}_\lambda^N, \nu) < \varepsilon\} \subset \{\lambda/d(\hat{\mu}_\lambda^N, \nu') < 3\frac{\varepsilon}{2}\}.$$

Let us consider the function  $f_2$  given by

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{if } x \leq M \\ x - M, & \text{if } M \leq x \leq M + 2N\varepsilon \\ 2N\varepsilon, & \text{if } x \geq M + 2N\varepsilon. \end{cases}$$

$f_2$  is a bounded Lipschitz function whose Lipschitz norm is bounded by 1 and such that  $\int f_2 d\nu' = 0$ . But, if there exists an  $\ell_j$  greater or equal  $2N^2\varepsilon + NM$  then  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_2\left(\frac{\ell_i}{N}\right) \geq 2\varepsilon \geq 3\frac{\varepsilon}{2}$ , so that we have the inclusion

$$\{\lambda/d(\hat{\mu}_\lambda^N, \nu) < \varepsilon\} \subset \{\lambda/\forall j, \ell_j \leq 2N^2\varepsilon + NM\}$$

and we get the upper bound as we know that

$$\#\{\lambda/\forall j, \ell_j \leq 2N^2\varepsilon + NM\} \leq (2N^2\varepsilon + NM)^N.$$

Upper and lower bound together give the result announced in Lemma 1.3.5. ■

### 1.3.4 $(\tilde{\Pi}^N)_{N \geq 0}$ satisfies a large deviation lower bound

In this part we show that

**Lemma 1.3.6**  $\tilde{\Pi}^N$  satisfies a large deviation lower bound, i.e for any  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ ,

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \tilde{\Pi}^N(B(\nu, \delta)) \geq -\tilde{H}(\nu).$$

**Proof.** To prove this lower bound, we follow [8] and consider discrete approximations of the probability measures  $\nu \in \{\tilde{H} < \infty\}$  as follows. First note that  $\tilde{H} < \infty$  implies that for any  $\alpha < \beta$ ,  $\nu([\alpha, \beta]) \leq (\beta - \alpha)$ .

Recall from (1.33) and (1.32) that  $\tilde{H}(\nu) \leq M$  implies that for some universal constant  $C$  and  $\rho > 0$ ,

$$\rho \int x d\nu(x) \leq M + C \text{ and } \Sigma(\nu) > -M - C. \quad (1.42)$$

The last condition in particular implies that  $\nu$  have no atoms. We now construct the following approximations.

Recall that  $\varphi_L(x) = x \wedge L$  and set  $\nu^L = (\varphi_L)_\# \nu$ . By Chebychev inequality,

$$d(\nu, \nu^L) \leq \int_{x>L} d\nu \leq \rho^{-1} L^{-1} (M + C),$$

and if  $\nu$  is in  $\mathcal{L}$ , so is  $\nu^L$ .

We then consider

$$\begin{aligned} a_{N,N} &= \inf \left\{ x / \nu^L([0, x]) \geq \frac{1}{N} \right\} \\ a_{i-1,N} &= \begin{cases} \inf \left\{ x \geq a_{i,N} / \nu^L((a_{i,N}, x]) \geq \frac{1}{N} \right\}, & \text{if } a_{i,N} < L \\ L + \frac{1}{N}, & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

It is easy to check that since  $\nu$  has no atoms, for  $N \geq N(\eta)$ ,

$$d \left( \nu, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{a_{i,N}} \right) < \eta + \rho^{-1} L^{-1} (M + C). \quad (1.43)$$

Now, for  $N, L$  large enough so that the right hand sides of (1.43) is smaller than  $2^{-1}\delta$ ,

$$\bigcap_{i=1}^N \left\{ \left| \frac{\ell_i}{N} - a_{i,N} \right| < \frac{\delta}{2} \right\} \subset \left\{ d \left( \hat{\mu}_\lambda^N, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{a_{i,N}} \right) < \frac{\delta}{2} \right\} \subset \{ d(\hat{\mu}_\lambda^N, \nu) < \delta \}$$

Therefore

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^N(B(\nu, \delta)) &\geq \tilde{\Pi}^N \left( \bigcap_{i=1}^N \left\{ \left| \frac{\ell_i}{N} - a_{i,N} \right| < \frac{\delta}{2} \right\} \right) \\ &\geq \tilde{\Pi}^N \left( \bigcap_{i=1}^N \left\{ \left| \frac{\ell_i}{N} - a_{i,N} \right| < \varepsilon \right\} \right) \end{aligned}$$

for any  $\varepsilon \in (0, \frac{\delta}{2}]$ . We now show that for any fixed  $L$ ,

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \tilde{\Pi}^N \left( \bigcap_{i=1}^N \left\{ \left| \frac{\ell_i}{N} - a_{i,N} \right| < \varepsilon \right\} \right) \geq -\tilde{H}(\nu^L). \quad (1.44)$$

Observe first that  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{a_{i,N}}$  is supported in  $[-L-1, L+1]$  so that all the spherical integrals are well defined and uniformly continuous by Lemma 1.3.2. Therefore, we find a  $\kappa(\varepsilon)$ , going to zero with  $\varepsilon$  such that for  $N$  sufficiently large,

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}^N \left( \bigcap_{i=1}^N \left\{ \left| \frac{\ell_i}{N} - a_{i,N} \right| < \varepsilon \right\} \right) &\geq e^{N^2(aI(\log_{\#} \mu_A, \nu^L) + bI(\log_{\#} \mu_B, \nu^L) + F(\nu) - \kappa(\varepsilon))} \\ &\quad \times \sum_{\left| \frac{\ell_i}{N} - a_{i,N} \right| < \varepsilon} \Delta \left( \frac{\ell}{N} \right)^{a+b} e^{-N^2 \int c(x) d\hat{\mu}_\lambda^N(x)} \end{aligned} \quad (1.45)$$

Notice that

$$\begin{aligned} \sum_{\left| \frac{\ell_i}{N} - a_{i,N} \right| < \varepsilon} \Delta \left( \frac{\ell}{N} \right)^{a+b} e^{-N^2 \int c(x) d\hat{\mu}_\lambda^N(x)} &= \sum_{\left| \frac{\ell_i}{N} - a_{i,N} \right| < \varepsilon} e^{N^2 \left( \frac{a+b}{2} \iint_{x \neq y} \log |x-y| d\hat{\mu}_\lambda^N(x) d\hat{\mu}_\lambda^N(y) - \int c(x) d\hat{\mu}_\lambda^N(x) \right)} \\ &\geq e^{-N \sum_{j=1}^N \sup_{|x-a_{j,N}| \leq \frac{\varepsilon}{2}} c(x) + \frac{a+b}{2} N^2 \iint_{x \neq y} \log |x-y| d\hat{\mu}_\lambda^N(x) d\hat{\mu}_\lambda^N(y)}. \end{aligned}$$

where  $\lambda$  is a Young shape defined by  $\ell_i := \lfloor Na_{i,N} \rfloor$ .

Note that such a tableau exists, since according to the definition of the  $a_{i,N}$ 's, we have that

$$\frac{1}{N} \leq \nu^L([a_{i+1,N}, a_{i,N}]) \leq a_{i,N} - a_{i+1,N},$$

so that

$$N(a_{i,N} - a_{i+1,N}) \geq 1,$$

which insures that  $\ell_i - \ell_{i+1} \geq 1$  and so  $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$  for all  $i \in \mathbb{N}$ . Note that  $|\frac{\ell_i}{N} - a_{i,N}| < \frac{1}{N}$  is smaller than  $\varepsilon$  for  $N$  large enough.

Furthermore, we also get the estimate

$$a_{i+1,N} \leq \frac{\ell_i}{N} \leq a_{i,N}.$$

Therefore, for  $i, j$  such that  $i < j - 1$ , we have the lower bound

$$\left| \frac{\ell_i}{N} - \frac{\ell_j}{N} \right| \geq |a_{i,N} - a_{j-1,N}|,$$

so that

$$\begin{aligned} \sum_{|\frac{\ell_i}{N} - a_{i,N}| < \varepsilon} \Delta \left( \frac{\ell}{N} \right)^{a+b} e^{-N^2 \int c(x) d\hat{\mu}_\lambda^N(x)} &\geq \exp \left( N^2 \left( -\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (c(a_{j,N}) + C(L, \delta)) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{a+b}{2} \frac{1}{N^2} \sum_{i+1 < j} \log |a_{i,N} - a_{j,N}| + \frac{a+b}{4N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \log \left| \frac{\ell_{i+1}}{N} - \frac{\ell_i}{N} \right| \right) \right) \end{aligned}$$

where  $C(L, \delta)$  is going to zero as  $\delta$  goes to infinity for any given  $L$ . With our choice of the  $a_{j,N}$ 's, we have that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N c(a_{j,N}) = \int x d\nu^L(x),$$

and

$$\begin{aligned} &\frac{1}{N^2} \sum_{i < j} \log |a_{i,N} - a_{j+1,N}| + \frac{1}{2N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \log |a_{i,N} - a_{i+1,N}| \\ &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq N-1} \log |a_{i,N} - a_{j+1,N}| \nu^L \otimes \nu^L(a_{i,N} \leq x \leq a_{i+1,N}; a_{j,N} \leq y \leq a_{j+1,N}) \\ &\geq \int_{a_{1,N} \leq x < y \leq a_{N,N}} \log |x - y| d\nu^L(x) d\nu^L(y) \end{aligned} \tag{1.46}$$

Let's turn our attention to the last term : for any choice of the  $\ell_i$ 's, as the  $\ell_i$  are distinct integers, the difference of a pair of them is at least 1, so that we have

$$\prod_{i=1}^{N-1} \left| \frac{\ell_{i+1}}{N} - \frac{\ell_i}{N} \right| \geq \left( \frac{1}{N} \right)^{N-1},$$

which gives

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \sum_{i=1}^{N-1} \log \left| \frac{\ell_{i+1}}{N} - \frac{\ell_i}{N} \right| = 0.$$

Putting everything together, we can conclude,

$$\liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \sum_{\substack{\ell \\ |\frac{\ell}{N} - a_{i,N}| < \varepsilon}} \Delta \left( \frac{\ell}{N} \right)^{a+b} e^{-N^2 \int c(x) d\hat{\mu}_\lambda^N(x)} \geq -\frac{a+b}{2} \Sigma(\nu^L) - \int c(x) d\nu^L(x)$$

(1.46) and (1.45) prove (1.44). To finish the proof, we take the supremum over  $L$  to obtain the lower bound thanks to Lemma 1.3.2.2 and monotone convergence theorem.

## 1.4 Laplace method for $Z_N(\Phi)(X)$

Let  $\mu_\varphi^N$  be the measure on  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  given, for any measurable set  $X$  of  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ , by

$$\mu_\varphi^N(X) = \frac{Z_N(\Phi)(X)}{Z_N(\Phi)}.$$

The goal of this section is to prove a large deviation theorem for  $\mu_\varphi^N$ . We first need some definitions.

**Definition 1.4.1** *With  $\mathcal{L}$  and  $\Sigma$  as defined in Definition 1.1.4 and  $\rho_\Phi$  given by (1.7), we let*

$$\mathcal{G}_\Phi(\nu) = \begin{cases} -I(\log_{\#} \mu_A, \nu) - I(\log_{\#} \mu_B, \nu) - \Sigma(\nu) + \rho_\Phi \cdot \int x d\nu(x), & \text{if } \nu \in \mathcal{L}, \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and if  $\Psi = \|\Phi\|_\infty^{-1} \Phi$ ,

$$J_\Phi(\nu, \mu) := \begin{cases} -I(\log_{\#} \Psi_{\#} \mu, \nu) - \frac{1}{2} S(\Psi_{\#} \mu) - \Sigma(\mu) + \frac{1}{2} \int x^2 d\mu(x), & \text{if } \nu \in \mathcal{L}, \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

with  $I$  as defined in Lemma 1.3.2. The rate function governing our large deviation principle is then given, for  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , by

$$I_\Phi(\mu) := \inf_{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)} (\mathcal{G}_\Phi(\nu) + J_\Phi(\nu, \mu)) - \inf_{\mu' \in \mathcal{P}(\mathbb{R})} \inf_{\nu' \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)} (\mathcal{G}_\Phi(\nu') + J_\Phi(\nu', \mu')).$$

To prove the large deviation principle, we shall make the following additional hypothesis

### Hypothesis 1.4.2

The cut-off function  $\Phi$  is bounded below :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ s.t. } \forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) \geq \varepsilon. \quad (1.47)$$

The two sequences of matrices  $(A_N)_{N \in \mathbb{N}}$  and  $(B_N)_{N \in \mathbb{N}}$  and their spectral measures  $\hat{\mu}_{A_N}$  and  $\hat{\mu}_{B_N}$  are such that

- there exists an  $\alpha > 0$  so that for all  $N$ ,  $A_N$  and  $B_N$  are bounded below by  $\alpha I$ . Hence, with  $\mathcal{K}$  the compact set  $[\alpha, 1]$ ,  $\text{supp } \hat{\mu}_{A_N} \subset \mathcal{K}$  and  $\text{supp } \hat{\mu}_{B_N} \subset \mathcal{K}$ .
- $\mu_{A_N}$  and  $\mu_{B_N}$  converge weakly respectively to  $\mu_A$  and  $\mu_B$ .

We shall then prove that

**Theorem 1.4.3** *Under Hypotheses 1.2.1 and 1.4.2,*

1.  $I_\Phi$  is a good rate function on  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ , i.e.  $I_\Phi$  is non-negative and for any  $M \in \mathbb{R}^+$ ,  $\{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : I_\Phi(\nu) \leq M\}$  is compact.
2.  $(\mu_\Phi^N)_{N \in \mathbb{N}}$  satisfies a large deviation principle in the scale  $N^2$  with good rate function  $I_\Phi$ , i.e.
  - For any closed subset  $F$  of  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \mu_\Phi^N(F) \leq - \inf_F I_\Phi,$$

- For any open subset  $O$  of  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \mu_\Phi^N(O) \geq - \inf_O I_\Phi.$$

3. Under Hypothesis 1.4.2,  $S(\hat{\mu}_{A_N}^N)$  (resp.  $S(\hat{\mu}_{B_N}^N)$ ) converges towards  $S(\mu_A)$  (resp.  $S(\mu_B)$ ), and

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \frac{Z_N(\Phi)}{Z_N(0)} = - \inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})} \inf_{\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)} (\mathcal{G}_\Phi(\nu) + J_\Phi(\nu, \mu)) + \frac{1}{2} S(\mu_A) + \frac{1}{2} S(\mu_B) + \frac{1}{2} \rho_\Phi.$$

The proof of this theorem is deduced from a large deviation principle obtained for the law of the couple  $(\hat{\mu}_\lambda^N, \hat{\mu}_M^N)$  given by the Gibbs measure defined, for  $X = (X_1, X_2) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , by

$$\Pi_\Phi^N(X) = \frac{1}{Z_N(\Phi)} \sum_{\lambda: \hat{\mu}_\lambda^N \in X_1} s_\lambda(A_N) s_\lambda(B_N) Z_N(\Psi, \lambda)(X_2) e^{-\rho_\Phi |\lambda|} \quad (1.48)$$

that we can formulate as follows :

**Theorem 1.4.4**

1. For  $(\nu, \mu) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , we set

$$\mathcal{I}_\Phi(\nu, \mu) := \begin{cases} +\infty & \text{if } \nu \notin \mathcal{L} \text{ or } \int x^2 d\mu(x) = +\infty, \\ J_\Phi(\nu, \mu) + \mathcal{G}_\Phi(\nu) - \inf_{(\nu', \mu') \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})} \{J_\Phi(\nu', \mu') + \mathcal{G}_\Phi(\nu')\} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then  $\mathcal{I}_\Phi$  is a good rate function.

2.  $(\Pi_\Phi^N)_{N \in \mathbb{N}}$  satisfies a full large deviation principle in the scale  $N^2$  with rate function  $\mathcal{I}_\Phi$ .

Theorem 1.4.3.1 and .2 are direct consequences of Theorem 1.4.4 and the contraction principle since the application  $(\nu, \mu) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  is clearly continuous.

**Proof of Theorem 1.4.4 :** This proof follows rather closely that of Theorem 1.3.1. Let us briefly outline it.

1. To prove that  $\mathcal{I}_\Phi$  is a good rate function, we note first that it is clearly non-negative. To show that its level sets are compact, we proceed exactly as in section 1.3.1 ;  $\mathcal{G}_\Phi$  has compact level sets by direct application of Theorem 1.3.1.1 whereas for  $J_\Phi$  we can proceed similarly once we notice that  $\mu \rightarrow S(\Psi \# \mu)$  is continuous since  $\Psi$  is bounded below by a positive constant and

$$S(\Psi \# \mu) = \iint \log \left( \int_0^1 (a\Psi(x) + (1-a)\Psi(y))^{-1} da \right) d\mu(x) d\mu(y)$$

and introducing the function

$$j(x, y) = \log |x - y|^{-1} + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2,$$

we can treat it as  $g$  (that was introduced in (1.28)) to show that  $\mu \mapsto \iint j(x, y) d\mu(x) d\mu(y)$  is lower semicontinuous on  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  and infinite unless  $\int x^2 d\mu(x)$  and  $\Sigma(\mu)$  are finite. Thus, we see that  $\mathcal{I}_\Phi(\nu, \mu)$  is infinite unless

$$\nu \in \mathcal{L}, \quad \int x d\nu(x) < \infty, \quad \Sigma(\nu) > -\infty, \quad \int x^2 d\mu(x) < \infty, \quad \Sigma(\mu) > -\infty.$$

This in particular shows that we can apply the formula for the spherical integral obtained in [38] when  $\int x^2 d\nu(x) < \infty$  and hence the formula for  $\mathcal{I}_\Phi$  is explicit.

2. To prove that  $\Pi_\Phi^N$  is exponentially tight, we consider the compact set

$$K_L := \left\{ \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) : \int x d\nu(x) \leq L \right\} \times \left\{ \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) : \int x^2 d\mu(x) \leq L \right\}.$$

It is not hard to bound below  $Z_\Phi^N$  by some estimate of order  $e^{-N^2 C}$  (for instance by proving the lower bound estimate as below). Then, using the fact that  $S(\Psi_\# \mu)$  as well as the spherical integrals are bounded uniformly, we find a finite constant  $C'$  such that

$$\Pi_\Phi^N(K_L^c) \leq e^{C' N^2} \left( \tilde{\Pi}^N(K_L^c) + \int_{\sum x_i^2 \geq NL} \Delta(x)^2 e^{-\frac{N}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2} \prod_{i=1}^N dx_i \right).$$

Following [8] (or the arguments of section 1.3.2) we easily see that for sufficiently large  $L$

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \int_{\sum x_i^2 \geq NL} \Delta(x)^2 e^{-\frac{N}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2} \prod_{i=1}^N dx_i \leq -\frac{1}{4} L$$

so that we can conclude again by section 1.3.2.

3. To prove the weak large deviation upper bound, we proceed as in section 1.3.3 by considering the functions  $g$  (with  $c(x) = \rho_\Phi x$  and  $a = b = 1$ ) and  $j$ . We then impose a cutoff on both functions and on the spherical integrals as in (1.40) to obtain a large deviation upper bound estimate, and then proceed again by optimizing over the cutoff.
4. For the large deviation lower bound, we restrict the sum and the integral also to configurations contained in small neighborhoods of well chosen values  $(a_{i,N})_{1 \leq i \leq N}$  and  $(x_{i,N})_{1 \leq i \leq N}$  and show convergence. This strategy works as well in the continuous setting as can be seen in [8].

## 1.5 Study of the minimizers of $\mathcal{I}_\Phi$

In this section, we wish to give some weak description of the minimizers of  $\mathcal{I}_\Phi$ . We have not been able to prove uniqueness of such minimizers. In [34], uniqueness of the minimizers of the rate function was deduced from convexity arguments which were actually lacking for instance for the  $q$ -Potts model. In fact, the spherical integrals are expressed as the sum of a convex complicated

function and the entropies  $\Sigma$  which are concave. Hence, if the full rate function does not contain some term to kill these  $\Sigma$  terms, the convexity of the full rate function becomes unclear. The same phenomenon appears here and despite our efforts we could not overcome this difficulty. It is unclear here whether the minimizer should be unique or not. We here meet the additional difficulty that the formula obtained in [38] for the limit of the spherical integral concerned the case where both probability measures had finite covariance, which is not the case here (one of the argument has only a first moment which is finite, even if the other one is compactly supported).

In this section, we show that the minimizers of  $\mathcal{I}_\Phi$  are compactly supported. We then characterize the minimizers.

**Proposition 1.5.1** *Assume that  $\Sigma(\log \#\mu_A) > -\infty$ ,  $\Sigma(\log \#\mu_B) > -\infty$ . Then*

1. *There exists a real number  $M \geq 0$  such that any minimizer  $(\nu, \mu) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$  of  $\mathcal{I}_\Phi$  satisfies  $\text{supp}(\nu) \subset [0, M]$ .*
2. *If we additionally assume that there exists  $A < B$  in  $\mathbb{R}$  such that for  $L$  large enough  $\Phi$  satisfies*

$$\max_{|x| \geq L} \Phi(x) \leq \inf_{x \in [A, B]} \Phi(x) \quad (1.49)$$

*then there exists a real number  $M$  such that for any minimizer  $(\nu, \mu) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$  of  $\mathcal{I}_\Phi$ ,  $\mu$  satisfies  $\text{supp}(\mu) \subset [-M, M]$ .*

3.  $\mathcal{I}_\Phi$  *achieves its minimal value (which is zero). Let  $(\bar{\nu}, \bar{\mu})$  be a minimizer. Then*
  - *There exists 3 flows  $(\rho^i, u^i)_{1 \leq i \leq 3}$  such that*
    - $\mu_t^i(dx) = \rho_t^i(x)dx$  *is a probability measure for all  $t \in (0, 1)$ .  $t \in [0, 1] \mapsto \mu_t^i \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  is continuous and for a.e.  $t$ ,  $x \mapsto \rho_t^i(x)$  is continuous.*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \mu_t^1 = \log \#\mu_A, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \mu_t^2 = \log \#\mu_B, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \mu_t^3 = \log \Psi \#\mu,$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \mu_t^i = \nu, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

- *For  $i \in \{1, 2, 3\}$ ,  $(\rho^i, u^i)$  satisfies the Euler equation for isentropic flow described by the equations, for  $t \in (0, 1)$ ,*

$$\partial_t \rho_t^i(x) = -\partial_x(\rho_t^i(x)u_t^i(x)) \quad (1.50)$$

$$\partial_t(\rho_t^i(x)u_t^i(x)) = -\partial_x \left( \rho_t^i(x)u_t^i(x)^2 - \frac{\pi^2}{3} \rho_t^i(x)^3 \right) \quad (1.51)$$

*in the sense of distributions that for all  $f \in C_c^{\infty, \infty}(\mathbb{R} \times [0, 1])$ ,*

$$\int_0^1 \int \partial_t f(t, x) d\mu_t^i(x) dt + \int_0^1 \int \partial_x f(t, x) u_t^i(x) d\mu_t^i(x) dt = 0$$

*and, for any  $f \in C_c^{\infty, \infty}(\Omega_i)$  with  $\Omega_i := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1] : \rho_t^i(x) > 0\}$ ,*

$$\int_0^1 \int (2u_t^i(x)\partial_t f(x, t) + (u_t^i(x)^2 - \pi^2 \rho_t^i(x)^2) \partial_x f(x, t)) dx dt = 0, \quad (1.52)$$

where  $C_c^{\infty, \infty}(\mathcal{A})$  is the space of functions which are infinitely differentiable on both variables on the open set  $\mathcal{A}$  and compactly supported.

$(\rho^i, u^i)$  are smooth in the interior of  $\Omega_i$ , which guarantees that (1.50) and (1.51) hold everywhere in the interior of  $\Omega_i$ . Moreover,  $\Omega_i$  is bounded in  $\mathbb{R} \times [0, 1]$ .

• Let  $\bar{\rho}$  be the density of  $\bar{\nu}$  and  $\bar{\Omega} = \{x : \bar{\rho}(x) > 0\}$ . Then, for any continuously differentiable test function  $\varphi$  which is supported in the interior of  $\bar{\Omega}$ ,

$$\int \left( \rho_{\Phi} x - \frac{1}{2} x^2 + \int \log |x - y| d\bar{\nu}(y) \right) \partial_x \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^3 \int \varphi(x) u_1^i(x) dx.$$

• For any  $\varphi \in C^1(\text{Im}(\log \Psi)^c \cap \text{supp}(\bar{\mu}))$ ,

$$\int \partial_x \varphi(x) \left( \frac{1}{2} x^2 - 2 \int \log |x - y| d\bar{\mu}(y) \right) dx = 0$$

To simplify, we shall assume that  $\log \Psi$  is one to one from  $\mathbb{R}$  into its image  $\text{Im}(\log \Psi)$ . Then, in a very weak sense of distribution, for any  $\varphi \in C^1(\text{Im}(\log \Psi) \cap \text{supp}(\bar{\mu}))$

$$\begin{aligned} \int \partial_x \varphi \left( -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} (\log \Psi)^{-1}(x)^2 - 2 \int \log |(\log \Psi)^{-1}(x) - y| d\bar{\mu}(y) \right. \\ \left. + \int \log |e^x - \Psi(y)| d\bar{\mu}(y) \right) dx = - \int \varphi(x) u_0^3(x) dx. \end{aligned}$$

If  $\bar{\mu}$  has a density with respect to Lebesgue measure, we obtain the usual sense of distribution in the interior of  $\text{Im}(\log \Psi) \cap \text{supp}(\bar{\mu})$ .

The additional assumption is needed to be able to use [34] results which required it.

**Proof.** • We first prove the first point, that is for any minimizer  $(\nu, \mu) \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$  of  $\mathcal{I}_{\Phi}$ ,  $\nu$  is compactly supported. In [34], such a result was obtained by going back to the matrix model. We shall here provide a new proof based on the study of  $\mathcal{I}_{\Phi}$ . The only property of the spherical integral we shall use is the following : Let  $\nu$  and  $\nu^*$  in  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$  be such that there exists a coupling  $\pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+)$  of  $(\nu, \nu^*)$  such that  $\pi(x \in \cdot) = \nu(x \in \cdot)$ ,  $\pi(y \in \cdot) = \nu^*(y \in \cdot)$ , and

$$\pi(x \leq y) = 1. \quad (1.53)$$

Then, for any  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^-)$  which is compactly supported,

$$I(\nu^*, \mu) \leq I(\nu, \mu). \quad (1.54)$$

This is a direct consequence of the definition of the spherical integral ; indeed, by the above, we can construct discrete approximations  $(\ell_i, 1 \leq i \leq N)$  and  $(\ell_i^*, 1 \leq i \leq N)$  such that  $N^{-1} \sum_{i=1}^N \delta_{\frac{\ell_i}{N}}$  (resp.  $N^{-1} \sum_{i=1}^N \delta_{\frac{\ell_i^*}{N}}$ ) converges towards  $\nu$  (resp.  $\nu^*$ ) and  $\ell_i \leq \ell_i^*$ . Therefore, if  $N^{-1} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}$  approximates  $\mu$  with  $\lambda_i \leq 0$ , it is clear that

$$I_N \left( \frac{\ell_i}{N}, \lambda_i \right) \geq I_N \left( \frac{\ell_i^*}{N}, \lambda_i \right)$$

yielding (1.54) at the limit  $N \rightarrow \infty$ .

Let now  $(\nu^*, \mu^*)$  be a minimizer and  $\nu$  satisfying (1.53) belonging to  $\mathcal{L}$ . By definition,

$$\mathcal{I}_{\Phi}(\nu, \mu^*) \geq \mathcal{I}_{\Phi}(\nu^*, \mu^*),$$



and therefore by (1.54), since  $\log \sharp\mu_A$ ,  $\log \sharp\mu_B$  and  $\log \Psi \sharp\mu$  are supported in  $\mathbb{R}^-$ ,

$$-\Sigma(\nu) + \rho_\Phi \int x d\nu(x) \geq -\Sigma(\nu^*) + \rho_\Phi \int x d\nu^*(x). \quad (1.55)$$

We shall use this inequality for a well chosen  $\nu$  which is a modification of  $\nu^*$ . We construct it as follows : recall that  $\nu^* \in \mathcal{L}$  implies that  $\nu^*(dx) = \rho^*(x)dx$  with  $\rho^* \leq 1$ . We assume that  $\nu^*([0, M]) < 1$  and are going to show a contradiction for  $M$  large enough. Observe that  $A := \int_0^3 1_{\{x: \rho^*(x) \leq \frac{1}{2}\}} dx \geq 1$  since  $\int_0^\infty \rho^*(x)dx = 1$ . Set for  $M \geq 3$ ,

$$\nu = \nu_M = 1_{[0, M]} \nu^* + \frac{\alpha_M}{A} 1_{\{\rho^* \leq \frac{1}{2}, x \in [0, 3]\}} dx,$$

with  $\alpha_M = \nu^*([M, \infty[)$ .

We have on one side that

$$\begin{aligned} -\Sigma(\nu^*) &= -\Sigma(1_{[0, M]} \nu^*) + 2 \int_{\substack{x < M \\ y > M}} \log |x - y|^{-1} d\nu^*(x) d\nu^*(y) + \int_{\substack{x > M \\ y > M}} \log |x - y|^{-1} d\nu^*(x) d\nu^*(y) \\ &\geq -\Sigma(1_{[0, M]} \nu^*) + 2 \int_{\substack{x < M, y > M \\ |x - y| > 1}} \log |x - y|^{-1} d\nu^*(x) d\nu^*(y) \\ &\quad + \int_{\substack{x > M, y > M \\ |x - y| > 1}} \log |x - y|^{-1} d\nu^*(x) d\nu^*(y) \end{aligned}$$

Using that for all  $a \in (0, 1]$  there exists a finite constant such that for all  $x \geq 0$ ,

$$\log(1 + x) \leq C_a x^a$$

we deduce

$$\begin{aligned} -\Sigma(\nu^*) &\geq -\Sigma(1_{[0, M]} \nu^*) - 2C_a \int_{\substack{x < M, y > M \\ |x - y| > 1}} (|x - y| - 1)^a d\nu^*(x) d\nu^*(y) \\ &\quad - C_a \int_{\substack{x > M, y > M \\ |x - y| > 1}} (|x - y| - 1)^a d\nu^*(x) d\nu^*(y) \\ &\geq -\Sigma(1_{[0, M]} \nu^*) - (2 + \alpha_M) C_a \int_{y > M} y^a d\nu^*(y) \\ &\geq -\Sigma(1_{[0, M]} \nu^*) - (2 + \alpha_M) C_a M^{a-1} \int_{y > M} y d\nu^*(y) \end{aligned} \quad (1.56)$$

where we used in the last line Chebyshev inequality.

On the other side,

$$\begin{aligned}
-\Sigma(\nu_M) &= -\Sigma(1_{[0,M]}\nu^*) + 2\frac{\alpha_M}{A} \int_{x < M} \int_0^3 1_{\rho^*(y) \leq \frac{1}{2}} \log|x-y|^{-1} dy d\nu^*(x) \\
&\quad + \left(\frac{\alpha_M}{A}\right)^2 \int_0^3 1_{\rho^*(x) \leq \frac{1}{2}} \int_0^3 1_{\rho^*(y) \leq \frac{1}{2}} \log|x-y|^{-1} dy dx \\
&\leq -\Sigma(1_{[0,M]}\nu^*) + 2\frac{\alpha_M}{A} \int_{x < M} \int_0^3 1_{\rho^*(y) \leq \frac{1}{2}} 1_{|x-y| \leq 1} \log|x-y|^{-1} dy \rho^*(x) dx \\
&\quad + \left(\frac{\alpha_M}{A}\right)^2 \int_0^3 1_{\rho^*(x) \leq \frac{1}{2}} \int_0^3 1_{\rho^*(y) \leq \frac{1}{2}} 1_{|x-y| \leq 1} \log|x-y|^{-1} dy dx \\
&\leq -\Sigma(1_{[0,M]}\nu^*) + \left(2\frac{\alpha_M}{A} + \left(\frac{\alpha_M}{A}\right)^2\right) \int_{x < 4} \int_0^3 1_{|x-y| \leq 1} \log|x-y|^{-1} dy dx \\
&\leq -\Sigma(1_{[0,M]}\nu^*) + 4 \left(2\frac{\alpha_M}{A} + \left(\frac{\alpha_M}{A}\right)^2\right) \tag{1.57}
\end{aligned}$$

Observe now that  $\nu_M$  in  $\mathcal{L}$  for  $M$  large enough so that  $A^{-1}\alpha_M \leq 2^{-1}$ . Furthermore,  $\nu_M$  satisfies (1.53) since we have been transporting large values of the  $l_i$ 's to smaller one. Hence, we can apply (1.55) and together with (1.56), (1.57), it gives that

$$\rho_\Phi \left( \int_{x > M} x d\nu^*(x) - \frac{\alpha_M}{A} \int_0^3 x 1_{\rho^* < \frac{1}{2}} dx \right) \leq (2 + \alpha_M) C_a M^{a-1} \int_{y > M} y d\nu^*(y) + 4 \left( 2\frac{\alpha_M}{A} + \left(\frac{\alpha_M}{A}\right)^2 \right),$$

showing that for any  $a \in (0, 1)$ , for  $M$  large enough,

$$(\rho_\Phi - (2 + \alpha_M) C_a M^{a-1}) \int_{x > M} x d\nu^*(x) \leq \frac{15}{A} \alpha_M \leq \frac{15}{AM} \int_{x > M} x d\nu^*(x) \tag{1.58}$$

which shows that  $\int_{x > M} x d\nu^*(x)$  has to be null when  $\rho_\Phi - (2 + \alpha_M) C_a M^{a-1} - \frac{15}{AM} > 0$  that is for  $M$  large enough.

• We now pass to the proof of the second point of the proposition. Let, with  $\beta_M = \mu^*([-M, M]^c)$ , for  $B > A$ ,

$$\mu_M(dx) = 1_{[-M, M]}\mu^*(dx) + \frac{\beta_M}{B - A} 1_{[A, B]} dx$$

Because of our assumption, we see that if  $M$  is large enough and  $[A, B]$  chosen so that

$$\inf_{[A, B]} \Phi \geq \sup_{[-M, M]^c} \Phi$$

for any  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ ,

$$I(\log \Psi \# \mu_M, \nu) \geq I(\log \Psi \# \mu^*, \nu).$$

Hence, when  $(\mu^*, \nu^*)$  minimize  $\mathcal{I}_\Phi$ , we obtain

$$-\Sigma(\mu^*) + \frac{1}{2} \int x^2 d\mu^*(x) - \frac{1}{2} S(\Psi \# \mu^*) \leq -\Sigma(\mu_M) + \frac{1}{2} \int x^2 d\mu_M(x) - \frac{1}{2} S(\Psi \# \mu_M) \tag{1.59}$$

Arguing as above, we find that, for any  $a \in (0, 2)$ , there exists a finite constant  $C_a$  such that

$$\Sigma(\mu^*) - \Sigma(\mu_M) \leq C_a M^{a-2} \int x^2 d\mu^*(x) \quad (1.60)$$

$$-S(\Psi \sharp \mu_M) + S(\Psi \sharp \mu^*) \leq C\beta_M \quad (1.61)$$

where we observed in the last line that  $\Psi$  was bounded uniformly above and below. Hence, we arrive at

$$\left(\frac{1}{2} - C_a M^{a-2}\right) \int_{x \geq M} x^2 d\mu^*(x) \leq C'\beta_M \leq C' M^{-2} \int_{x \geq M} x^2 d\mu^*(x) \quad (1.62)$$

where  $C' = C + B^2$ . This is again a contradiction for sufficiently large  $M$ .

• We finally study the characterization of the minimizers. In [34], the characterization was done by going back to the matrix model description. We shall here tackle this problem by a direct study of the rate function. Note that by point 1., any minimizers  $(\bar{\nu}, \bar{\mu})$  is such that  $\bar{\nu}$  is compactly supported. Moreover  $\log \Psi \sharp \bar{\mu}$ ,  $\log \sharp \mu_A$  and  $\log \sharp \mu_B$  are also compactly supported by our hypotheses so that we can apply Property 2.2 in [34] which says that if  $\mu, \nu$  are two probability measures with finite covariance and such that  $\Sigma(\mu) > -\infty$ ,  $\Sigma(\nu) > -\infty$ ,

$$I(\mu, \nu) = -\frac{1}{2} \inf_{(\rho, u) \in C(\mu, \nu)} \{S(\rho, u)\} - \frac{1}{2} (\Sigma(\mu) + \Sigma(\nu) - \mu(x^2) - \nu(x^2)) + c \quad (1.63)$$

where

$$S(\rho, u) := \int_0^1 \int u_t(x)^2 \rho_t(x) dx dt + \frac{\pi^2}{3} \int_0^1 \int \rho_t(x)^3 dx dt,$$

$$C(\mu, \nu) = \left\{ \rho \in L^1(dx dt), \int \rho_t(x) dx = 1 \ \forall t \in [0, 1], \lim_{t \rightarrow 0} \rho_t(x) dx = \mu, \lim_{t \rightarrow 1} \rho_t(x) dx = \nu, \right. \\ \left. \partial_t \rho_t(x) + \partial_x(\rho_t(x) u_t(x)) = 0 \right\},$$

where the last equality is to be understood in the sense of distributions. It was shown in [34] that the infimum defining  $I$  is achieved at a unique  $(u^*, \rho^*) \in C(\mu, \nu)$  which is described by an isentropic Euler equation with negative pressure  $p(\rho) = -\frac{\pi^2}{3} \rho^3$ .  $c$  is a universal constant. As a consequence of this formula, since  $\mathcal{I}_\Phi(\mu, \nu) < \infty$  implies that  $\Sigma(\mu) > -\infty$ ,  $\Sigma(\nu) > -\infty$  and  $\mu(x^2) < \infty$ , for any  $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$  such that  $\nu(x^2) < \infty$ , we find from the definition of  $\mathcal{I}_\Phi$  given in Theorem 1.4.4 that

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_\Phi(\mu, \nu) &= \inf_{((\rho^i, u^i) \in C(\mu^i, \nu))_{1 \leq i \leq 3}} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 S(\rho^i, u^i) + \frac{1}{2} \Sigma(\nu) - \Sigma(\mu) + \frac{1}{2} \Sigma(\Psi \sharp \mu) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mu(-\log \Psi(x)^2 + x^2) - \frac{3}{2} \nu(x^2) + \rho_\Phi \nu(x) + K(\mu_A, \mu_B) \right\} \\ &:= \inf_{((\rho^i, u^i) \in C(\mu^i, \nu))_{1 \leq i \leq 3}} \Xi((\rho^i, u^i)_{1 \leq i \leq 3}, \nu, \mu), \end{aligned} \quad (1.64)$$

where  $\mu^1 = \log \sharp \mu_A$ ,  $\mu^2 = \log \sharp \mu_B$ ,  $\mu^3 = \log \Psi \sharp \bar{\mu}$  and  $K(\mu_A, \mu_B)$  is a constant depending only on  $\mu_A$  and  $\mu_B$ .

We now consider a minimizer  $((\bar{\rho}^i, \bar{u}^i)_{1 \leq i \leq 3}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$  of  $\Xi$  in  $\Omega := \{\nu \in \mathcal{L}, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), (\bar{\rho}^i, \bar{u}^i)_{1 \leq i \leq 3} \in C(\log \sharp \mu_A, \nu) \times C(\log \sharp \mu_B, \nu) \times C(\log \Psi \sharp \mu, \nu)\}$ . To characterize this minimizer, we perform a small perturbation. Let  $((\rho_\varepsilon^i, u_\varepsilon^i)_{1 \leq i \leq 3}, \mu_\varepsilon, \nu_\varepsilon) \in \Omega$  be given, for compactly supported functions  $(\varphi^i)_{1 \leq i \leq 3}$  in  $\mathcal{C}^{1,1}(\mathbb{R} \times [0, 1])$  by

$$\rho_\varepsilon^i(t, x) = \bar{\rho}^i(t, x) + \varepsilon \partial_x \varphi^i(t, x) \quad \text{and} \quad u_\varepsilon^i(t, x) \rho_\varepsilon^i(t, x) = \bar{u}^i(t, x) \bar{\rho}^i(t, x) - \varepsilon \partial_t \varphi^i(t, x),$$

with  $\partial_x \varphi^i(1, x) = \partial_x \varphi(1, x)$  independent of  $i$ ,  $\partial_x \varphi^i(0, x) = 0$  for  $i = 1, 2$ .

Note that, once we chose the perturbation for  $\rho^i$ , the form of the perturbation for  $u^i \rho^i$  taken above ensures that the first equation  $\partial_t \rho^i(t, x) = -\partial_x(u^i(t, x) \rho^i(t, x))$  is automatically satisfied.

This implies also

$$\nu_\varepsilon = \bar{\nu} + \varepsilon \partial_x \varphi^i(1, x) dx$$

and

$$\log \Psi \sharp \mu_\varepsilon(dx) = \log \Psi \sharp \bar{\mu}(dx) + \varepsilon \partial_x \varphi^3(0, x) dx.$$

We perturb more generally  $\mu$  by setting

$$\mu_\varepsilon(dx) = \bar{\mu}(dx) + \varepsilon \partial_x \psi(x) dx$$

with the condition

$$\int f(\log \Psi(x)) \partial_x \psi(x) dx = \int f(x) \partial_x \varphi^3(0, x) dx$$

for all bounded continuous functions  $f$ .

We shall assume that

$$L(\varphi) = \sum_{i=1}^3 \int_0^1 \int \left( \frac{|\partial_t \varphi^i(t, x)|^2}{\bar{\rho}^i(t, x)} \right) dx dt + \sum_{i=1}^3 \sup_{t \in (0,1)} \left\| \frac{\partial_x \varphi^i(t, x)}{\bar{\rho}^i(t, x)} \right\|_\infty < \infty.$$

It is not hard to see that under such conditions,  $\Xi((\rho_\varepsilon^i, u_\varepsilon^i)_{1 \leq i \leq 3}, \mu_\varepsilon, \nu_\varepsilon)$  is finite.

By the condition

$$\Xi((\rho_\varepsilon^i, u_\varepsilon^i)_{1 \leq i \leq 3}, \mu_\varepsilon, \nu_\varepsilon) \geq \Xi((\bar{\rho}^i, \bar{u}^i)_{1 \leq i \leq 3}, \bar{\mu}, \bar{\nu})$$

we obtain, taking the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$ , that

$$\begin{aligned} & \int \left( \rho_{\Phi} x - \frac{3}{2} x^2 \right) \partial_x \varphi(1, x) dx - \frac{1}{2} \int x^2 \partial_x \varphi^3(0, x) dx + \frac{1}{2} \int x^2 \partial_x \psi(x) dx \\ & + \iint \log |x - y| d\bar{\nu}(y) \partial_x \varphi(1, x) dx - 2 \iint \log |x - y| d\bar{\mu}(y) \partial_x \psi(x) dx \\ & + \iint \log |e^x - e^y| d \log \Psi \sharp \bar{\mu}(y) \partial_x \varphi^3(0, x) dx \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \int \int_0^1 [-2 \partial_t \varphi^i(t, x) \bar{u}^i(t, x) - (\bar{u}^i(t, x))^2 \partial_x \varphi^i(t, x) + \pi^2 (\bar{\rho}^i(t, x))^2 \partial_x \varphi^i(t, x)] dx dt \geq 0 \end{aligned} \tag{1.65}$$

Changing  $\varphi^i$  (for  $1 \leq i \leq 3$ ) and  $\psi$  respectively into  $-\varphi^i$  and  $-\psi$ , we get that the inequality in (1.65) is in fact an equality.

Applying this result with  $\varphi^i(0, x) = \varphi^i(1, x) = 0$  shows that  $(\bar{u}^i, \bar{\rho}^i)_{1 \leq i \leq 3}$  satisfies the Euler equation for isentropic flow described in the proposition.

We now turn to the boundary conditions expressed in the last two points of Proposition 1.5.1. To characterize them, we will try to regularize the densities  $\rho_\varepsilon^i(t, \cdot)$ . We remark that by Property 2.8 in [34], since  $\bar{v}$  and  $\bar{\mu}$  are compactly supported under our hypothesis, we can find sequences of potentials  $(h^{\varepsilon, i}, \varepsilon > 0, 1 \leq i \leq 3)$  in  $C_b^{1,1}(\mathbb{R} \times [0, 1])$  such that if we set

$$\rho_\varepsilon^i(t, x) := \pi^{-1}(\max\{\partial_t h^{\varepsilon, i}(t, x) + 4^{-1}(\partial_x h^{\varepsilon, i}(t, x))^2, 0\})^{\frac{1}{2}}$$

then for any  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} & \int \left( \bar{u}^i(t, x) - \partial_x \frac{h^{\varepsilon, i}(t, x)}{2} \right)^2 \bar{\rho}^i(t, x) dx dt + \frac{\pi^2}{3} \int_0^1 \int (\bar{\rho}^i(t, x) - \rho_\varepsilon^i(t, x))^2 (\bar{\rho}^i(t, x) + \rho_\varepsilon^i(t, x)) dx dt \\ & + \pi^2 \int_0^1 \int |\partial_t h^{\varepsilon, i}(t, x) + 4^{-1}(\partial_x h^{\varepsilon, i}(t, x))^2 - \pi^2 \rho_\varepsilon^i(t, x)^2| \bar{\rho}^i(t, x) dx dt \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

From this result, we deduce that

$$\begin{aligned} & \sup_{1 \leq i \leq 3} \left| \int_0^1 \int [-2\partial_t \varphi^i(t, x) \bar{u}^i(t, x) - (\bar{u}^i(t, x))^2 \partial_x \varphi^i(t, x) + \pi^2 (\bar{\rho}^i(t, x))^2 \partial_x \varphi^i(t, x)] dx dt \right. \\ & \left. - \int_0^1 \int [-\partial_t \varphi^i(t, x) \partial_x h^{\varepsilon, i}(t, x) - \frac{1}{4}(\partial_x h^{\varepsilon, i}(t, x))^2 \partial_x \varphi^i(t, x) + \pi^2 (\rho_\varepsilon^i(t, x))^2 \partial_x \varphi^i(t, x)] dx dt \right| \leq C_{L(\varphi)} \sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

with  $C_{L(\varphi)} < \infty$  when  $L(\varphi) < \infty$ . Moreover, since  $h^{i, \varepsilon} \in C^{1,1}(\mathbb{R} \times [0, 1])$ , we can integrate by part so that

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 \int [-\partial_t \varphi^i(t, x) \partial_x h^{\varepsilon, i}(t, x) - 4^{-1}(\partial_x h^{\varepsilon, i}(t, x))^2 \partial_x \varphi^i(t, x) + \pi^2 (\rho_\varepsilon^i(t, x))^2 \partial_x \varphi^i(t, x)] dx dt \right. \\ & \left. - 2 \left[ \int h^{\varepsilon, i} \partial_x \varphi^i dx \right]_0^1 \right| \leq C'(L(\varphi)) \sqrt{\varepsilon} \end{aligned}$$

We now can define in the sense of distribution

$$\int \Pi_t^i \partial_x \varphi^i dx = - \int u_t^i \varphi^i dx$$

and by letting  $\varepsilon$  going to zero we get that

$$\int [-2\partial_t \varphi^i(t, x) \bar{u}^i(t, x) - (\bar{u}^i(t, x))^2 \partial_x \varphi^i(t, x) + \pi^2 (\bar{\rho}^i(t, x))^2 \partial_x \varphi^i(t, x)] dx dt = 2 \left[ \int \Pi_t^i \partial_x \varphi^i dx \right]_0^1.$$

Thus, we have proved that we can rewrite (1.65) (which we showed to be an equality) under the form

$$\begin{aligned}
& \int \left( \rho_{\Phi} x - \frac{3}{2} x^2 \right) \partial_x \varphi(1, x) dx - \frac{1}{2} \int x^2 \partial_x \varphi^3(0, x) dx + \frac{1}{2} \int x^2 \partial_x \psi(x) dx \\
& + \int \int \log |x - y| d\bar{\nu}(y) \partial_x \varphi(1, x) dx - 2 \int \int \log |x - y| d\bar{\mu}(y) \partial_x \psi(x) dx \\
& + \int \int \log |\Psi(x) - \Psi(y)| d\bar{\mu}(y) \partial_x \psi(x) dx \\
& + \sum_{i=1}^3 \left( \int \Pi_1^i \partial_x \varphi(1, x) dx - \int \Pi_0^i \partial_x \varphi^i(0, x) dx \right) = 0
\end{aligned} \tag{1.66}$$

From that we can deduce the boundary conditions we are seeking for.

As the equality (1.66) holds for any function  $\partial_x \varphi(1, x)$  such that  $L(\varphi)$  is finite, we find that

$$A(x, \bar{\nu}) = \rho_{\Phi} x - \frac{3}{2} x^2 + \int \log |x - y| d\bar{\nu}(y) + \sum_{i=1}^3 \Pi_1^i(x) \tag{1.67}$$

is constant in the sense of distribution.

Furthermore, it is not hard to deduce from the representation of  $\rho_t^i$  as a free Brownian motion given in [34] that for  $t$  close enough to one  $\{x : \rho_t^i(x) \geq \varepsilon\} \subset \{x : \bar{\rho}(x) \geq 2\varepsilon\}$  with  $\bar{\rho}$  the density of  $\bar{\nu}$  with respect to Lebesgue measure. Therefore, for any  $\mathcal{C}_b^1$  function  $\varphi$  with compact support in the interior of  $\{x : \bar{\rho}(x) > 0\}$ ,

$$\int \partial_x \varphi(x) A(x, \bar{\nu}) dx = 0.$$

Now only the last point of our proposition is left to establish.

The statement of the result is more obscure when dealing with  $\bar{\mu}$  since we do not a priori know if  $\bar{\mu}$  has a density with respect to Lebesgue measure. What we get from (1.66) is that :

For any  $\psi \in \mathcal{C}_b^1(\text{Im}(\log \Psi)^c \cap \text{supp}(\bar{\mu}))$

$$\int \partial_x \psi(x) \left( \frac{1}{2} x^2 - 2 \int \log |x - y| d\bar{\mu}(y) \right) dx = 0$$

i.e  $\frac{1}{2} x^2 - 2 \int \log |x - y| d\bar{\mu}(y)$  is constant outside of the image  $\text{Im}(\log \Psi)$  of  $\log \Psi$ .

Inside  $\text{Im}(\log \Psi)$ , if we assume that  $\log \Psi$  is one to one from  $\mathbb{R}$  onto its image, we have that

$$B(x, \bar{\mu}) = -\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} (\log \Psi)^{-1}(x)^2 - 2 \int \log |(\log \Psi)^{-1}(x) - y| d\bar{\mu}(y) + \int \log |e^x - \Psi(y)| d\bar{\mu}(y) - \Pi_0^3(x)$$

is constant in the weak sense of distribution that is its integral with respect to  $\partial_x \varphi^3(x, 0)$  vanishes. If  $\bar{\mu}$  has a density with respect to Lebesgue measure, we find that  $B(x, \bar{\mu})$  is constant in the sense of distribution inside  $\{x : \frac{d\bar{\mu}}{dx} \neq 0\}$  as above, but it is not clear that a  $\varphi^3 \neq 0$  indeed exists in general! ■

## 1.6 Conclusion and remarks

In this chapter, we studied the asymptotics of the model given by the partition function (1.1). In the course of doing so, we adapted the techniques of [8] to study large deviations of the profiles of Young tableaux with a density given by a Vandermonde determinant and Schur polynomial functions (see Theorem 1.1.5). We believe that these techniques might be useful to study other problems since these kinds of distributions appear in different contexts due to their combinatorial nature. For instance, following Migdal-Witten formula [82, 81], the partition function of two-dimensional Yang Mills theory on a cylinder with gauge group  $U(N)$  is given by the central heat kernel defined, at time  $t = TN^{-1}$ , by

$$\mathcal{Z}_N \left( U_1, U_2; \frac{T}{N} \right) = \sum_{\lambda} s_{\lambda}(U_1) s_{\lambda}(U_2) e^{-\frac{T}{2N} C_2(\lambda)}$$

where  $U_1, U_2 \in U(N)$ , the sum runs over Young tableaux  $\lambda$  and

$$C_2(\lambda) = \sum_{i=1}^N \lambda_i(\lambda_i + 1 - 2i + N) = \sum_{i=1}^N \ell_i^2 - (N-1) \sum_{i=1}^N \ell_i + \sum_{i=1}^N (N-i)(i-1)$$

with  $\ell_i = \lambda_i + N - i$  (see for example [33]).

S. Zelditch [83] asked us if we could study the asymptotics of  $\mathcal{Z}_N(U_1, U_2; TN^{-1})$  when  $U_1, U_2$  are not unitary but real diagonal matrices with converging spectral distributions. Our techniques apply readily to this context and we find

**Theorem 1.6.1** *Let  $A_N, B_N$  be two sequences of uniformly bounded matrices bounded below by  $\varepsilon I$  for some  $\varepsilon > 0$  with spectral measures converging towards  $\mu_A, \mu_B$ . Then for any time  $T > 0$*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \mathcal{Z}_N \left( A_N, B_N; \frac{T}{N} \right) = Z(\mu_A, \mu_B, T)$$

with

$$Z(\mu_A, \mu_B; T) = \sup_{\nu \in \mathcal{L}} \left\{ I(\log_{\#} \mu_A, \nu) + I(\log_{\#} \mu_B, \nu) + \Sigma(\nu) - \frac{T}{2} \int x^2 d\nu(x) + \frac{T}{2} \int x d\nu(x) \right\} \\ + \frac{1}{2} S(\mu_A) + \frac{1}{2} S(\mu_B) - \frac{T}{12}$$

This theorem is a direct consequence of Theorem 1.1.5 with  $a = b = 1$  and  $c(x) = x^2 - x$ .

In addition to giving a rigorous basis to the study of such natural asymptotics, we gave a firm ground to begin the study of other matrix models where additional problems due for instance to signed series might appear. This step seems necessary since the proofs are already rather involved. Furthermore, we developed new arguments to study the saddle points of our model based on transport of mass.

One of the weakness of our result is apparently the cut-off function  $\Phi$ , since the matrix integral (1.1) is then hard to relate with the enumeration of maps as in [51]. Let us comment heuristically

on this point. Observe first that the matrix integral (1.1) with  $\Phi(x) = x$  considered in [51] is always infinite. Indeed, for instance in the case  $A = 1$ , we are integrating

$$Z_N(Id) = \int_{x_i \in \mathbb{R}} \Delta(x)^2 \prod_{i,j=1}^N \frac{1}{1 - b_i x_j} e^{-N \sum x_j^2} \prod dx_j$$

which is clearly infinite for all  $N \in \mathbb{N}^*$ . Hence, everything should be understood formally. The same problem a priori also arises when one considers random triangulations generated by the one matrix integrals

$$\tilde{Z}_N(\lambda) = \int e^{\lambda N \operatorname{tr}(M^3) - \frac{N}{2} \operatorname{tr}(M^2)} dM$$

which is clearly infinite for  $\lambda \neq 0$ . One way to bypass this problem is for instance to consider

$$\tilde{Z}_N(\lambda, \eta) = \int e^{-\eta N \operatorname{tr}(M^4) + \lambda N \operatorname{tr}(M^3) - \frac{N}{2} \operatorname{tr}(M^2)} dM$$

which is well defined for  $\eta > 0$ . Recall that planar maps are enumerated by

$$C(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \partial_\lambda^n \frac{1}{N^2} \log \tilde{Z}_N(\lambda)|_{\lambda=0} = \lim_{N \rightarrow \infty} \partial_\lambda^n \frac{1}{N^2} \log \tilde{Z}_N(\lambda, \eta)|_{\lambda=0, \eta=0}.$$

In the physics literature, these quantities are implicitly supposed to be given by

$$\tilde{C}(n) = \partial_\lambda^n \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \tilde{Z}_N(\lambda, \eta)|_{\lambda=0, \eta=0}.$$

This is fine for rather general one matrix models according to Theorem 1.1 of [23], but this point is open in general.

Similarly, one could try to regularize the dually weighted graphs model by considering  $Z_N(\Phi_{\varepsilon, R})$  with

$$\Phi_{\varepsilon, R}(x) = \frac{x}{1 + \varepsilon x^2} + R$$

with  $\varepsilon > 0$  and  $R \geq \sqrt{2\varepsilon}^{-1}$ . For  $\|A\|$  and  $\|B\|$  small enough (which we can always assume since again only derivatives at the origin should be of interest), we obtain by our result a limit for  $N^{-2} \log Z_N(\Phi_{\varepsilon, R})$ . Assuming that the limit can be extended analytically to  $R, \varepsilon$  small, we should be able to enumerate, modulo the above ansatz of interchanging derivation and limit, the enumeration of dually weighted graphs.

There is still a long way toward the rigorous understanding of the use of matrix integrals for the enumeration of maps in physics but we hope that the results we've just presented provide some useful steps in this direction.



## Chapitre 2

# An asymptotic log-Fourier interpretation of the $R$ -transform

Ce chapitre est tiré de l'article [36], écrit en collaboration avec A. Guionnet et accepté pour publication dans *Journal of Functional Analysis*.

### Abstract

We estimate the asymptotics of spherical integrals of real symmetric or Hermitian matrices when the rank of one matrix is much smaller than its dimension. We show that it is given in terms of the  $R$ -transform of the spectral measure of the full rank matrix and give a new proof of the fact that the  $R$ -transform is additive under free convolution. These asymptotics also extend to the case where one matrix has rank one but complex eigenvalue.

## 2.1 Introduction

### 2.1.1 General framework and statement of the results

Hereafter, we consider the spherical integrals

$$I_N^{(\beta)}(D_N, E_N) := \int \exp\{N \operatorname{tr}(UD_NU^*E_N)\} dm_N^\beta(U),$$

where  $m_N^{(\beta)}$  denote the Haar measure on the orthogonal group  $\mathcal{O}_N$  when  $\beta = 1$  and on the unitary group  $\mathcal{U}_N$  when  $\beta = 2$ , and  $D_N, E_N$  are  $N \times N$  matrices that we can assume diagonal without loss of generality. Such integrals are often called, in the physics literature, Itzykson-Zuber or Harish-Chandra integrals. We do not consider the case  $\beta = 4$  mostly to lighten the notations.

Some asymptotics of the spherical integrals, that are those needed to solve matrix models, were investigated in [38]. More precisely, when  $D_N, E_N$  have  $N$  distinct real eigenvalues  $(\theta_i(D_N), \lambda_i(E_N))_{1 \leq i \leq N}$  and the spectral measures  $\hat{\mu}_{D_N}^N = \frac{1}{N} \sum \delta_{\theta_i(D_N)}$  and  $\hat{\mu}_{E_N}^N = \frac{1}{N} \sum \delta_{\lambda_i(E_N)}$  converge respectively to  $\mu_D$  and  $\mu_E$ , it is proved in Theorem 1.1 of [38] that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log I_N^{(\beta)}(D_N, E_N) = I^{(\beta)}(\mu_D, \mu_E) \quad (2.1)$$

exists under some technical assumptions and a (complicated) formula for this limit is given.

We investigate here different asymptotics of the spherical integrals, namely the case where one of the matrix, say  $D_N$ , has rank much smaller than  $N$ .

Such asymptotics were also already used in physics (see [56], where they consider replicated spin glasses, the number of replica being there the rank of  $D_N$ ) or stated for instance in [16], section 1, as a formal limit (the spherical integral being seen as a series in  $\theta$  when  $D_N = \text{diag}(\theta, 0, \dots, 0)$  whose coefficients are converging as  $N$  goes to infinity). However, to our knowledge, there is no rigorous derivation of this limit available in the literature. We here study this problem by use of large deviations techniques. The proofs are however rather different from those of [38]; they rely on large deviations for Gaussian variables and not on their Brownian motion interpretation and stochastic analysis as in [38].

Before stating our results, we now introduce some notations and make a few remarks. Let  $D_N = \text{diag}(\theta, 0, \dots, 0)$  have rank one so that

$$I_N^{(\beta)}(D_N, E_N) = I_N^{(\beta)}(\theta, E_N) = \int e^{\theta N(U E_N U^*)_{11}} dm_N^{(\beta)}(U). \quad (2.2)$$

Note that in general, in the case  $\beta = 1$ , we will omit the superscript  $(\beta)$  in all these notations.

We make the following hypothesis :

### Hypothesis 2.1.1

1.  $\hat{\mu}_{E_N}^N$  converges weakly towards a compactly supported measure  $\mu_E$ .
2.  $\lambda_{\min}(E_N) := \min_{1 \leq i \leq N} \lambda_i(E_N)$  and  $\lambda_{\max}(E_N) := \max_{1 \leq i \leq N} \lambda_i(E_N)$  converge respectively to  $\lambda_{\min}$  and  $\lambda_{\max}$  which are finite.

Note that under Hypothesis 2.1.1, the support of  $\mu_E$ , which we shall denote  $\text{supp}(\mu_E)$ , is included in  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ .

Let us denote, for a probability measure  $\mu_E$ , its Hilbert transform by  $H_{\mu_E}$  :

$$\begin{aligned} H_{\mu_E} : I_E := \mathbb{R} \setminus \text{supp}(\mu_E) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto \int \frac{1}{z - \lambda} d\mu_E(\lambda). \end{aligned} \quad (2.3)$$

It is easily seen (c.f subsection 2.1.2 for details) that  $H_{\mu_E} : I_E \rightarrow H_{\mu_E}(I_E)$  is invertible, with inverse denoted  $K_{\mu_E}$ . For  $z \in H_{\mu_E}(I_E)$ , we set  $R_{\mu_E}(z) = K_{\mu_E}(z) - z^{-1}$  to be the so-called  $R$ -transform of  $\mu_E$ . In the case of the spectral measure  $\hat{\mu}_{E_N}^N$  of  $E_N$ , we denote by  $H_{E_N}$  its Hilbert transform given by  $H_{E_N}(x) = \frac{1}{N} \text{tr}(x - E_N)^{-1} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x - \lambda_i(E_N))^{-1}$ .

The central result of this chapter can be stated as follows :

**Theorem 2.1.2** *Let  $\beta = 1$  or 2. If we assume that Hypothesis 2.1.1.1 is satisfied and that there is  $\varepsilon > 0$  such that*

$$\|E_N\|_{\infty} := \max\{|\lambda_{\max}(E_N)|, |\lambda_{\min}(E_N)|\} = O\left(N^{\frac{1}{2}-\varepsilon}\right), \quad (2.4)$$

*then for  $\theta$  small enough so that there exists  $\eta > 0$  so that*

$$\frac{2\theta}{\beta} \in \bigcup_{N_0 \geq 0} \bigcap_{N \geq N_0} H_{E_N}([\lambda_{\min}(E_N) - \eta, \lambda_{\max}(E_N) + \eta]^c), \quad (2.5)$$

$$I_{\mu_E}^{(\beta)}(\theta) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log I_N^{(\beta)}(\theta, E_N) = \frac{\beta}{2} \int_0^{\frac{2\theta}{\beta}} R_{\mu_E}(v) dv. \quad (2.6)$$

Under Hypothesis 2.1.1.2, (2.4) is obviously satisfied and (2.5) is equivalent to

$$\frac{2\theta}{\beta} \in H_{\mu_E}([\lambda_{min}, \lambda_{max}]^c).$$

This result is proved in section 2.2 and appears in a way as a by-product of Lemma 2.2.1. It raises several remarks and generalisations that we shall investigate hereafter.

Note that in Theorems 2.1.3, 2.1.4 and 2.1.5 hereafter we consider the case  $\beta = 1$ , which requires simpler notations but every statement could be extended to the case  $\beta = 2$ . The main difference to extend these theorems to the case  $\beta = 2$  is that, following Fact 2.1.8, it requires to deal with twice as many Gaussian variables, and hence to consider covariance matrices with twice bigger dimension (the difficulty lying then in showing that these matrices are positive definite).

The first question we can ask is how to precise the convergence (2.6). Indeed, in the full rank asymptotics, in particular in the framework of [38], the second order term has not yet been rigorously derived. In our case, if  $d$  is the Dudley distance between measures (which is compatible with the weak topology) given by

$$d(\mu, \nu) = \sup \left\{ \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|; |f(x)| \text{ and } \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq 1, \forall x \neq y \right\}, \quad (2.7)$$

we have

**Theorem 2.1.3** *Assume Hypothesis 2.1.1 and*

$$d(\hat{\mu}_{E_N}^N, \mu_E) = o(\sqrt{N}^{-1}).$$

*Let  $\theta$  be such that  $2\theta \in H_{\mu_E}([\lambda_{min}, \lambda_{max}]^c)$ .*

*– If  $\mu_E$  is not a Dirac measure at a single point, then, with  $v = R_{\mu_E}(2\theta)$ ,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-N(\theta v - \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \log(1 - 2\theta \lambda_i(E_N) + 2\theta v))} I_N(\theta, E_N) = \frac{\sqrt{Z - 4\theta^2}}{\theta \sqrt{Z}},$$

$$\text{with } Z := \int \frac{1}{(K_{\mu_E}(2\theta) - \lambda)^2} d\mu_E(\lambda).$$

*– If  $\mu_E = \delta_e$  for some  $e \in \mathbb{R}$ ,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-N\theta e} I_N(\theta, E_N) = 1.$$

This theorem gives the second order term for the convergence given in Theorem 2.1.2 above. Indeed, with  $2\theta \in H_{\mu_E}([\lambda_{min}, \lambda_{max}]^c)$ , under Hypothesis 2.1.1.2, there exists (cf. (2.14) for details)  $\eta(\theta) > 0$  so that for  $N$  large enough

$$1 - 2\theta \lambda_i(E_N) + 2\theta v > \eta(\theta).$$

Therefore, there exists a finite constant  $C(\theta) \leq (\eta(\theta)^{-1} + |\log(\eta(\theta))|)$  such that for  $N$  sufficiently large

$$\left| \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \log(1 - 2\theta \lambda_i(E_N) + 2\theta v) - \frac{1}{2} \int \log(1 - 2\theta \lambda + 2\theta v) d\mu_E(\lambda) \right| \leq C(\theta) d\left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i(E_N)}, \mu_E \right),$$

where  $d$  is the Dudley distance.

Moreover, with  $v = R_{\mu_E}(2\theta)$ , it is easy to see that

$$\theta v - \frac{1}{2} \int \log(1 - 2\theta\lambda + 2\theta v) d\mu_E(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^{2\theta} R_{\mu_E}(u) du,$$

showing how Theorem 2.1.3 relates with Theorem 2.1.2.

Another remark is that Theorem 2.1.2 can be seen as giving an interpretation of the primitive of the  $R$ -transform  $R_{\mu_E}$  as a Laplace transform of  $(UE_NU^*)_{11}$  for large  $N$  and for compactly supported probability measures  $\mu_E$ .

A natural question is to wonder whether it can be extended to the case where  $\theta$  is complex, to get an analogy with the Fourier transform that seems to have originally motivated Harish-Chandra. In the case of the different asymptotics studied in [38], this question is open : in physics, formal analytic extensions of the formula obtained for Hermitian matrices to any matrices are commonly used, but S. Zelditch [83] found that such an extension could be false by exhibiting counter-examples. In the context of the asymptotics we consider here, we shall however see that this extension is valid for  $|\theta|$  small enough. Note that, as far as  $\mu_E$  is compactly supported,  $R_{\mu_E}$  can be extended analytically at least in a complex neighborhood of the origin (see Proposition 2.1.13 for further details).

**Theorem 2.1.4** *Take  $\beta = 1$  and assume that  $(E_N)_{N \in \mathbb{N}}$  is a uniformly bounded sequence of matrices satisfying Hypothesis 2.1.1.1 where  $\mu_E$  is not a Dirac mass.*

*Assume furthermore that  $d(\hat{\mu}_{E_N}^N, \mu_E) = o(\sqrt{N}^{-1})$ , where  $d$  is the Dudley distance defined by (2.7). Then, there exists an  $r > 0$  such that, for any  $\theta \in \mathbb{C}$ , such that  $|\theta| \leq r$ ,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log I_N(\theta, E_N) = \theta v(\theta) - \frac{1}{2} \int \log(1 + 2\theta v(\theta) - 2\theta\lambda) d\mu_E(\lambda),$$

where  $\log(\cdot)$  is the main branch of the logarithm in  $\mathbb{C}$  and  $v(\theta) = R_{\mu_E}(2\theta)$ . More precisely, we prove that for  $\theta$  in a small neighbourhood of the origin,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} e^{-N(\theta v(\theta) - \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \log(1 - 2\theta\lambda_i(E_N) + 2\theta v(\theta)))} I_N(\theta, E_N) = \frac{\sqrt{Z - 4\theta^2}}{\theta\sqrt{Z}},$$

with  $Z := \int \frac{1}{(K_{\mu_E}(2\theta) - \lambda)^2} d\mu_E(\lambda)$ .

Note that the case  $\mu_E = \delta_e$  is trivial if we assume additionally Hypothesis 2.1.1.2 with  $\lambda_{\min}$  and  $\lambda_{\max}$  the edges of the support of  $\mu_E$  since then  $\max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i - e|$  goes to zero with  $N$  which entails

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log I_N(\theta, E_N) = \theta e$$

for all  $\theta$  in  $\mathbb{C}$ .

Note also that Theorem 2.1.4 is related to the analyticity of the spherical integrals (see [36] for more details), commonly used in physics.

The proof of Theorem 2.1.4 will be more involved than the real case treated in sections 2.2 and 2.3 and the difficulty lies of course in the fact that the integral is now oscillatory, forcing us to control more precisely the deviations in order to make sure that the term of order one in the large

$N$  expansion does not vanish. This is the object of section 2.4.

Once the view of spherical integrals as Fourier transforms has been justified by the extension to the complex plane, a second natural question is to wonder whether we can use it to see that the  $R$ -transform is additive under free convolution. Indeed, if we denote  $\mu \boxplus \nu$  the free convolution of two compactly supported probability measures on  $\mathbb{R}$ , it is uniquely described by the fact that

$$R_{\mu \boxplus \nu}(\lambda) = R_{\mu}(\lambda) + R_{\nu}(\lambda)$$

for sufficiently small  $\lambda$ 's. Theorem 2.1.2 provides an interpretation of this result. Voiculescu [73] proved that if  $A_N, B_N$  are two diagonal matrices with spectral measures converging towards  $\mu_A$  and  $\mu_B$  respectively, with uniformly bounded spectral radius, then the spectral measure of  $A_N + UB_NU^*$  converges, if  $U$  follows  $m_N^{(2)}$ , towards  $\mu_A \boxplus \mu_B$ . This result extends naturally to the case where  $U$  follows  $m_N^{(1)}$  (see [17] Theorem 5.2 for instance). Therefore, it is natural to expect the following result :

**Theorem 2.1.5** *Let  $\beta = 1$ ,  $(A_N, B_N)_{N \in \mathbb{N}}$  be a sequence of uniformly bounded real diagonal matrices and  $V_N$  following  $m_N^{(1)}$ .*

1. *Then*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \log I_N(\theta, A_N + V_N B_N V_N^*) - \int \frac{1}{N} \log I_N(\theta, A_N + V_N B_N V_N^*) dm_N^{(1)}(V_N) \right) = 0 \text{ a.s.} \quad (2.8)$$

2. *If additionnally the spectral measures of  $A_N$  and  $B_N$  converge respectively to  $\mu_A$  and  $\mu_B$  fast enough (i.e. such that  $d(\hat{\mu}_{A_N}, \mu_A) + d(\hat{\mu}_{B_N}, \mu_B) = o(\sqrt{N}^{-1})$ ) and  $\mu_A$  and  $\mu_B$  are not Dirac masses at a point, then, for any  $\theta$  small enough,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log I_N(\theta, A_N + V_N B_N V_N^*) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log I_N(\theta, A_N) + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log I_N(\theta, B_N) \text{ a.s.} \quad (2.9)$$

Then the additivity of the  $R$ -transform (cf. Corollary 2.6.1) is a direct consequence of this result together with the continuity of the spherical integrals with respect to the empirical measure of the full rank matrix (which will be shown in Lemma 2.2.1).

Note that the case where  $\mu_A$  or  $\mu_B$  are Dirac masses is trivial if we assume that the edges of the spectrum of  $A_N$  or  $B_N$  converge towards this point. The general case could be handled as well but, since it has no motivation for the  $R$ -transform (for which we can always assume that the above condition holds, see Corollary 2.6.1), we shall not detail it. Section 2.6 will be devoted to the proof of this theorem which decomposes mainly in two steps : to get the first point, we establish a result of concentration under  $m_N^{(1)}$  that will give us (2.8) ; then to prove the second point once we have the first one it is enough to consider the expectation of  $\frac{1}{N} \log I_N(\theta, A_N + V_N B_N V_N^*)$  and if one assumes that

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int \left( \log \int e^{\theta N(UA_NU^* + UV_N B_N V_N^* U^*)_{11}} dm_N^{(1)}(U) \right) dm_N^{(1)}(V) \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \int \int e^{\theta N(UA_NU^* + UV_N B_N V_N^* U^*)_{11}} dm_N^{(1)}(U) dm_N^{(1)}(V) \end{aligned} \quad (2.10)$$

the equality (2.9) follows from the observation that the right hand side equals  $N^{-1} \log I_N(\theta, A_N) + N^{-1} \log I_N(\theta, B_N)$ .

Note that equation (2.10) is rather typical to what should be expected for disordered particles systems in the high temperature regime and indeed our proof follows some very smart ideas of Talagrand that he developed in the context of Sherrington-Kirkpatrick model of spin glasses at high temperature (see [71]). This proof is however rather technical because the required control on the  $L^2$  norm of the partition function is based on the study of second order corrections of replicated systems which generalizes Theorem 2.1.3.

The next question, that we will actually tackle in section 2.5, deals with the understanding of the limit (2.6) for all the values of  $\theta$ . We find the following result

**Theorem 2.1.6** *Let  $\beta = 1$  or  $2$ . Assume  $\hat{\mu}_{E_N}^N$  satisfy Hypothesis 2.1.1.*

*If we let  $H_{\min} := \lim_{z \uparrow \lambda_{\min}} H_{\mu_E}(z)$  and  $H_{\max} := \lim_{z \downarrow \lambda_{\max}} H_{\mu_E}(z)$ , then*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log I_N^{(\beta)}(\theta, E_N) = I_{\mu_E}^{(\beta)}(\theta) = \theta v(\theta) - \frac{\beta}{2} \int \log \left( 1 + \frac{2}{\beta} \theta v(\theta) - \frac{2}{\beta} \theta \lambda \right) d\mu_E(\lambda)$$

with

$$v(\theta) = \begin{cases} R_{\mu_E}(\frac{2}{\beta}\theta) & \text{if } H_{\min} \leq \frac{2\theta}{\beta} \leq H_{\max} \\ \lambda_{\max} - \frac{\beta}{2\theta} & \text{if } \frac{2\theta}{\beta} > H_{\max} \\ \lambda_{\min} - \frac{\beta}{2\theta}, & \text{if } \frac{2\theta}{\beta} < H_{\min}. \end{cases}$$

Note here that the values of  $\lambda_{\min}$  and  $\lambda_{\max}$  do affect the value of the limit of spherical integrals in the asymptotics we consider here, contrarily to what happens in the full rank asymptotics considered in [38].

As a consequence of Theorem 2.1.6, we can see that there are two phase transitions at  $H_{\max}\beta/2$  and  $H_{\min}\beta/2$  which are of second order in general (the second derivatives of  $I_{\mu_E}(\theta)$  being discontinuous at these points, except when  $\lambda_{\max} H'_{\mu_E}(\lambda_{\max}) = 1$  (or similar equation with  $\lambda_{\min}$  instead of  $\lambda_{\max}$ ), in which case the transition is of order 3). These transitions can in fact be characterized by the asymptotic behaviour of  $(UE_N U^*)_{11}$  under the Gibbs measure

$$d\mu_N^{\beta, \theta}(U) = \frac{1}{I_N^{(\beta)}(\theta, E_N)} e^{N\theta(UE_N U^*)_{11}} dm_N^{(\beta)}(U).$$

For  $\theta \in \left[ \frac{H_{\min}\beta}{2}, \frac{H_{\max}\beta}{2} \right]^c$ ,  $(UE_N U^*)_{11}$  saturates and converges  $\mu_N^{\beta, \theta}$ -almost surely towards  $\lambda_{\max} - \frac{\beta}{2\theta}$  (resp.  $\lambda_{\min} - \frac{\beta}{2\theta}$ ). Hence, up to a small component of norm of order  $\theta^{-1}$ , with high probability, the first column vector  $U_1$  of  $U$  will align on the eigenvector corresponding to either the smallest or the largest eigenvalue of  $E_N$ , whereas for smaller  $\theta$ 's,  $U_1$  will prefer to charge all the eigenspaces of  $E_N$ .

Another natural question is to wonder what happens when  $D_N$  has not rank one but rank negligible compared to  $N$ . It is not very hard to see that in the case where all the eigenvalues of  $D_N$  are small enough (namely when they all lie inside  $H_{\mu_E}([\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^c)$ ), we find that the spherical integral approximately factorizes into a product of integrals of rank one. More precisely,

**Theorem 2.1.7** *Let  $\beta = 1$  or  $2$ . Let  $D_N = \text{diag}(\theta_1^N, \dots, \theta_{M(N)}^N, 0, \dots, 0)$  with  $M(N)$  which is  $o(N^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$  for some  $\varepsilon > 0$ . Assume that  $\hat{\mu}_{E_N}^N$  fulfills Hypothesis 2.1.1.1, that  $\|E_N\|_\infty = o(N^{\frac{1}{2}-\varepsilon})$  for some  $\varepsilon > 0$  and that there exists  $N_0 \in \mathbb{N}$  and  $\eta > 0$  such that, for all  $N \geq N_0$  and  $i$  from 1 to  $M(N)$ ,  $\frac{2\theta_i^N}{\beta} \in H_{E_N}([\lambda_{\min}(E_N) - \eta, \lambda_{\max}(E_N) + \eta]^c)$ .*

*Then, if  $\frac{1}{M(N)} \sum_{i=1}^{M(N)} \delta_{\theta_i^N}$  converges weakly to  $\mu_D$ ,*

$$I_{\mu_E}^{(\beta)}(D) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NM(N)} \log I_N^{(\beta)}(D_N, E_N)$$

*exists and is given by*

$$I_{\mu_E}^{(\beta)}(D) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{M(N)} \sum_{i=1}^{M(N)} I_{\mu_E}^{(\beta)}(\theta_i^N) = \int I_{\mu_E}^{(\beta)}(\theta) d\mu_D(\theta). \tag{2.11}$$

This will be shown at the end of section 2.2, the proof being very similar to the case of rank one. It relies mainly on Fact 2.1.8 hereafter and comes from the fact that in such asymptotics the  $M(N)$  first column vectors of an orthogonal or unitary matrix distributed according to the Haar measure behave approximately like independent vectors uniformly distributed on the sphere. This can be compared with the very old result of E. Borel [12] which says that one entry of an orthogonal matrix distributed according to the Haar measure behaves like a Gaussian variable. That kind of considerations finds continuation for example in a recent work of A. D’Aristotile, P. Diaconis and C. M. Newman [18] where they consider a number of element of the orthogonal group going to infinity not too fast with  $N$ . In the same direction, one can also mention the recent work of T. Jiang [47] where he shows that the entries of the first  $O(N/\log N)$  columns of an Haar distributed unitary matrix can be simultaneously approximated by independent standard normal variables.

Note that P. Śniady and one of the author could prove by different techniques that the asymptotics we are talking about extend to  $M(N) = o(N)$ .

Of course we would like to generalize also the full asymptotics we’ve got in Theorem 2.1.6 to the set up of finite rank i.e. in particular consider the case where some (a  $o(N)$  number) of the eigenvalues of  $E_N$  could converge away from the support. It seems to involve not only the deviations of  $\lambda_{\max}$  but those of the first  $M$  ones when the rank is  $M$ . Note that this question is particularly relevant for the problems we deal with in chapter 3 and is therefore the object of a forthcoming research.

To finish this introduction, we also want to mention that the results we’ve just presented give (maybe) less obvious relations between the  $R$ -transform and Schur functions or vicious walkers. Indeed, if  $s_\lambda$  denotes the Schur function associated with a Young tableau  $\lambda$  (cf. [67] for more details), then, it can be checked (cf. [37] for instance) that

$$s_\lambda(M) = I_N^{(2)} \left( \log M, \frac{\ell}{N} \right) \Delta \left( \frac{\ell}{N} \right) \frac{\Delta(\log M)}{\Delta(M)}$$

with  $\ell_i = \lambda_i + N - i$ ,  $1 \leq i \leq N$  and  $\Delta(M) = \prod_{i < j} (M_i - M_j)$  when  $M = \text{diag}(M_1, \dots, M_N)$ . Thus, our results also give the asymptotics of Schur functions when  $N^{-1} \delta_{N-1(\lambda_i + N - i)}$  converges towards

some compactly supported probability measure  $\mu$ . For instance, Theorem 2.1.2 implies that for  $\theta$  small enough

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \left( \prod_{i>j} (N^{-1}(\lambda_j - j - \lambda_i + i))^{-1} s_\lambda(e^\theta, 1, \dots, \dots, 1) \right) = \int_0^\theta R_\mu(u) du + \log(\theta(e^\theta - 1)^{-1}).$$

Such asymptotics should be more directly related with the combinatorics of the symmetric group and more precisely with non-crossing partitions which play a key role in free convolution.

On the other hand, it is also known that spherical integrals are related with the density kernel of vicious walkers, that is Brownian motions conditioned to avoid each others, either by using the fact that the eigenvalues of the Hermitian Brownian motion are described by such vicious walkers (more commonly named in this context Dyson's Brownian motions) or by applying directly the result of Karlin-McGregor [49]. Hence, the study of the asymptotics of spherical integrals we are considering allows to estimate this density kernel when  $N - 1$  vicious walkers start at the origin, the last one starting at  $\theta$  and at time one reach  $(x_1, \dots, x_N)$  whose empirical distribution approximates a given compactly supported probability measure.

### 2.1.2 Preliminary properties and notations

Before going into the proofs themselves, we gather here some material and notations that will be useful throughout the chapter.

#### Gaussian representation of Haar measure

In the different cases we will develop, the first step will be always the same : we will represent the column vectors of unitary or orthogonal matrices distributed according to Haar measure via Gaussian vectors. To be more precise, we recall the following fact :

**Fact 2.1.8** *Let  $k \leq N$  be fixed.*

- *Orthogonal case.*

*Let  $U = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}$  be a random orthogonal matrix distributed according to  $m_N^{(1)}$ , the Haar measure on  $\mathcal{O}_N$ . Denote by  $(u^{(i)})_{1 \leq i \leq N}$  the column vectors of  $U$ .*

*Let  $(g^{(1)}, \dots, g^{(k)})$  be  $k$  independent standard Gaussian vectors in  $\mathbb{R}^N$  and let  $(\tilde{g}^{(1)}, \dots, \tilde{g}^{(k)})$  the vectors obtained from  $(g^{(1)}, \dots, g^{(k)})$  by the standard Schmidt orthogonalisation procedure.*

*Then it is well known that*

$$(u^{(1)}, \dots, u^{(k)}) \sim \left( \frac{\tilde{g}^{(1)}}{\|\tilde{g}^{(1)}\|}, \dots, \frac{\tilde{g}^{(k)}}{\|\tilde{g}^{(k)}\|} \right),$$

*where  $\|\cdot\|$  denotes the Euclidean norm in  $\mathbb{R}^N$  and the equality  $\sim$  means that the two  $k \times N$ -matrices have the same law.*

- *Unitary case.*

*With the same notations, let  $U$  be distributed according to  $m_N^{(2)}$ , the Haar measure on  $\mathcal{U}_N$ . Let  $(g^{(1),R}, \dots, g^{(k),R}, g^{(1),I}, \dots, g^{(k),I})$  be  $2k$  independent standard Gaussian vectors in  $\mathbb{R}^N$  and let  $(\tilde{G}^{(1)}, \dots, \tilde{G}^{(k)})$  be the  $k$  vectors obtained from  $(g^{(1),R} + ig^{(1),I}, \dots, g^{(k),R} + ig^{(k),I})$  by the standard Schmidt orthogonalisation procedure with respect to the usual scalar product in  $\mathbb{C}^N$ .*



Then we get that

$$(u^{(1)}, \dots, u^{(k)}) \sim \left( \frac{\tilde{G}^{(1)}}{\|\tilde{G}^{(1)}\|}, \dots, \frac{\tilde{G}^{(k)}}{\|\tilde{G}^{(k)}\|} \right),$$

where  $\|\cdot\|$  denotes the usual norm in  $\mathbb{C}^N$ .

Note that heuristically, the above representation in terms of Gaussian vectors allows us to understand why the limit in the finite rank case behaves as a sum of functions of each of the eigenvalues of  $D_N$ . Indeed, in high dimension, we know that a bunch of  $k$  (independent of the dimension) Gaussian vectors are almost orthogonal one from another so that the orthogonalisation procedure let them almost independent.

### Some properties of the Hilbert and the R-transforms of a compactly supported probability measure on $\mathbb{R}$

Let  $\lambda_{\min}(E)$  and  $\lambda_{\max}(E)$  be the edges of the support of  $\mu_E$ . For all  $\lambda_{\min} \leq \lambda_{\min}(E)$  and  $\lambda_{\max} \geq \lambda_{\max}(E)$ , let us denote by  $H_{\min} := \lim_{z \uparrow \lambda_{\min}} H_{\mu_E}(z)$  and  $H_{\max} := \lim_{z \downarrow \lambda_{\max}} H_{\mu_E}(z)$ , where  $H_{\mu_E}$  was defined in (2.3).

We sum up the properties of  $H_{\mu_E}$  that will be useful for us in the following

#### Property 2.1.9 :

1.  $H_{\mu_E}$  is decreasing and positive on  $\{z > \lambda_{\max}\}$  and decreasing and negative on  $\{z < \lambda_{\min}\}$ .
2. Therefore,  $H_{\min}$  exists in  $\mathbb{R}_-^* \cup \{-\infty\}$  and  $H_{\max}$  exists in  $\mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ .
3.  $H_{\mu_E}$  is bijective from  $I = \mathbb{R} \setminus [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  onto its image  $I' := ]H_{\min}, H_{\max}[ \setminus \{0\}$ .
4.  $H_{\mu_E}$  is analytic on  $I$  and its derivative never cancels on  $I$ .

The third point of the property above allows the following

#### Definition 2.1.10 :

1.  $K_{\mu_E}$  is defined on  $I'$  as the functional inverse of  $H_{\mu_E}$ .
2.  $I'$  does not contain 0 so that, on  $I'$ , we can define  $R_{\mu_E}$  given by  $R_{\mu_E}(\gamma) = K_{\mu_E}(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$  for any  $\gamma \in I'$ .

We will need to consider the inverse  $Q_{\mu_E}$  of  $R_{\mu_E}$ . To define it properly, we have to look more carefully at the properties of  $R_{\mu_E}$ . We have :

#### Property 2.1.11 :

1.  $K_{\mu_E}$  and  $R_{\mu_E}$  are analytic (and in particular continuously differentiable) on  $I'$ .
2.  $R_{\mu_E}$  is increasing and its derivative never cancels.
3.  $\lim_{\gamma \rightarrow 0^-} R_{\mu_E}(\gamma) = \lim_{\gamma \rightarrow 0^+} R_{\mu_E}(\gamma) = m := \int \lambda d\mu_E(\lambda)$ .
4.  $R_{\mu_E}$  is bijective from  $I'$  onto its image  $I'' := \left] \lambda_{\min} - \frac{1}{H_{\min}}, \lambda_{\max} - \frac{1}{H_{\max}} \right[ \setminus \{m\}$  so that we can define its inverse  $Q_{\mu_E}$  from  $I''$  to  $I'$ . Moreover,  $Q_{\mu_E}$  is differentiable on  $I''$ .

The proof of these properties is easy and left to the reader.

The following property deals with the behaviour of these functions on the complex plane. A proof of it can be found for example in [72]. We first extend the definition of the Hilbert transform, that we denote again  $H_{\mu_E}$  by

$$\begin{aligned} H_{\mu_E} : \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\mu_E) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \int \frac{1}{z - \lambda} d\mu_E(\lambda). \end{aligned} \quad (2.12)$$

**Property 2.1.12 :**

1. There exists a neighbourhood  $\mathcal{A}$  of  $\infty$  such that  $H_{\mu_E}$  is bijective from  $\mathcal{A}$  into  $H_{\mu_E}(\mathcal{A})$ , which is a neighbourhood of 0.
2. We denote by  $K_{\mu_E}^{(c)}$  its functional inverse on  $H_{\mu_E}(\mathcal{A})$  and  $R_{\mu_E}^{(c)}$  is given by  $R_{\mu_E}^{(c)}(\gamma) = K_{\mu_E}^{(c)}(\gamma) - \frac{1}{\gamma}$  for any  $\gamma \in H_{\mu_E}(\mathcal{A})$  (that does not contain 0).
3.  $R_{\mu_E}^{(c)}$  is analytic and coincides with  $R_{\mu_E}$  on  $I' \cap H_{\mu_E}(\mathcal{A})$ . Therefore, we denote it again  $R_{\mu_E}$ .

Note that throughout the chapter, we will denote  $\lambda_i := \lambda_i(E_N)$ ,  $\theta_i := \theta_i(D_N)$  (and even  $\theta$  will denote  $\theta_1(D_N)$  in the case of rank one) and we recall that  $H_{E_N}$  denotes the Hilbert transform of  $\hat{\mu}_{E_N}^N$  and is given, for  $x \in [\min \lambda_i(E_N), \max \lambda_i(E_N)]^c$ , by  $H_{E_N}(x) = \frac{1}{N} \text{tr}(x - E_N)^{-1}$ .

We now state the following property, which will be useful in the proof of Theorem 2.1.4 :

**Proposition 2.1.13** *If  $(E_N)_{N \in \mathbb{N}}$  is uniformly bounded and satisfying Hypothesis 2.1.1.1, there exists  $r > 0$  such that, for any  $\theta \in \mathbb{C}$  such that  $|\theta| \leq r$ , there is a solution of*

$$H_{E_N} \left( \frac{1}{2\theta} + v_N(\theta) \right) = 2\theta,$$

such that  $v_N(\theta) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} R_{\mu_E}(2\theta)$ .

**Proof of Proposition 2.1.13 :** Let  $\mathcal{A}_N$  be a neighbourhood of  $\infty$  on which  $H_{E_N}$  is invertible ( $\mathcal{A}_N$  can be given as  $\{z/|z| > R_N\}$ , for some  $R_N$ ). For any  $\eta > 0$ , we denote by  $\mathcal{A}_N^\eta := \{x \in \mathcal{A}_N / d(x, \mathcal{A}_N^c) \geq \eta\}$ . Let  $\theta$  be such that there exists  $\eta > 0$  such that  $2\theta \in \bigcup_{N_0 \geq 0} \bigcap_{N \geq N_0} H_{E_N}(\mathcal{A}_N^\eta)$ , we take  $v_N(\theta)$  the unique solution in  $\mathcal{A}_N^\eta - (2\theta)^{-1}$  of

$$H_{E_N} \left( \frac{1}{2\theta} + v_N(\theta) \right) = 2\theta.$$

Since, for all  $\lambda \in \bigcup_{N_0 \geq 0} \bigcap_{N \geq N_0} \text{supp}(\hat{\mu}_{E_N}^N)$ , the application  $z \mapsto (z - \lambda)^{-1}$  is continuous bounded on  $\bigcup_{N_0 \geq 0} \bigcap_{N \geq N_0} \mathcal{A}_N^\eta$ , under Hypothesis 2.1.1.1,  $v_N(\theta)$  converges to  $R_{\mu_E}(2\theta)$ . Furthermore, the fact that  $(E_N)_{N \in \mathbb{N}}$  is uniformly bounded ensures that we can choose the  $\mathcal{A}_N$ 's such that there exists  $r > 0$  such that  $\bigcup_{N_0 \geq 0} \bigcap_{N \geq N_0} H_{E_N}(\mathcal{A}_N^\eta) \supset \{\theta / |\theta| \leq r\}$ . ■

## 2.2 Proof of Theorems 2.1.2, 2.1.7 and related results

Before going into more details, let us state and prove a lemma which deals with the continuity of  $I_N$  and its limit. We state here a trivial continuity in the finite rank matrix but also a weaker continuity result in the spectral measure of the diverging rank matrix, on which the proof of Theorem 2.1.2 is based.

**Lemma 2.2.1** *1. For any  $N \in \mathbb{N}$ , any sequence of matrices  $(E_N)_{N \in \mathbb{N}}$  with spectral radius  $\|E_N\|_\infty$  uniformly bounded by  $\|E\|_\infty$ , any Hermitian matrices  $(D_N, \tilde{D}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ ,*

$$\left| \frac{1}{N} \log I_N^{(\beta)}(D_N, E_N) - \frac{1}{N} \log I_N^{(\beta)}(\tilde{D}_N, E_N) \right| \leq \|E\|_\infty \operatorname{tr} |D_N - \tilde{D}_N|$$

*2. Let  $D_N = \operatorname{diag}(\theta, 0, \dots, 0)$ . Assume that there is a positive  $\eta$  and a finite integer  $N_0$  such that for  $N \geq N_0$ ,  $\frac{2\theta}{\beta} \in H_{E_N}([\lambda_{\min}(E_N) - \eta, \lambda_{\max}(E_N) + \eta]^c)$ . We let  $v_N$  be the unique solution in  $-\beta(2\theta)^{-1} + [\lambda_{\min}(E_N) - \eta, \lambda_{\max}(E_N) + \eta]^c$  of the equation*

$$\frac{\beta}{2\theta} H_{E_N} \left( \frac{\beta}{2\theta} + v_N \right) = 1. \quad (2.13)$$

*Then,  $v_N \in [\lambda_{\min}(E_N), \lambda_{\max}(E_N)]$  and for any  $\zeta \in (0, \frac{1}{2})$ , there exists a finite constant  $C(\eta, \zeta)$  depending only on  $\eta$  and  $\zeta$  such that for all  $N \geq N_0$*

$$\left| \frac{1}{N} \log I_N^{(\beta)}(\theta, E_N) - \theta v_N + \frac{\beta}{2N} \sum_{i=1}^N \log \left( 1 + \frac{2\theta}{\beta} v_N - \frac{2\theta}{\beta} \lambda_i \right) \right| \leq C(\eta, \zeta) N^{-\frac{1}{2} + \zeta} \|E_N\|_\infty.$$

*3. Let  $D_N = \operatorname{diag}(\theta, 0, \dots, 0)$ . Let  $E_N, \tilde{E}_N$  be two matrices such that*

$$d(\hat{\mu}_{E_N}^N, \hat{\mu}_{\tilde{E}_N}^N) \leq \delta,$$

*where  $d$  is the Dudley distance on  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  and so that both  $E_N$  and  $\tilde{E}_N$  satisfy (2.4).*

*Let  $\eta > 0$ . Assume that there exists  $N_0 < \infty$  so that for  $N \geq N_0$ ,  $\frac{2\theta}{\beta} \in H_{E_N}([\lambda_{\min}(E_N) - \eta, \lambda_{\max}(E_N) + \eta]^c) \cap H_{\tilde{E}_N}([\lambda_{\min}(\tilde{E}_N) - \eta, \lambda_{\max}(\tilde{E}_N) + \eta]^c)$ . Then, there exists a function  $g(\delta, \eta)$  (independent of  $N$ ) going to zero with  $\delta$  for any  $\eta$  and such that for all  $N \geq N_0$*

$$\left| \frac{1}{N} \log I_N^{(\beta)}(D_N, E_N) - \frac{1}{N} \log I_N^{(\beta)}(D_N, \tilde{E}_N) \right| \leq g(\delta, \eta)$$

Note that the third point is analogous to the continuity statement obtained in the case where  $D_N$  has also rank  $N$  in [38], Lemma 5.1. However, let us mention again that there is an important difference here which lies in the fact that the smallest and largest eigenvalues play quite an important role. In fact, it can be seen (see Theorem 2.1.6) that if we let one eigenvalue be much larger than the support of the limiting spectral distribution, then the limit of the spherical integral will change dramatically. However, Lemma 2.2.1.3 shows that this limit will not depend on these escaping eigenvalues provided  $|\theta|$  is smaller than some critical value  $\theta_0(\lambda_{\min}, \lambda_{\max}) (= \min(|H_{\min}\beta/2|, |H_{\max}\beta/2|))$ .

Before going into the proof of Lemma 2.2.1, let us show that Theorem 2.1.2 is a direct consequence of its second point.

**Proof of Theorem 2.1.2 :** Since we assumed that, for  $N$  large enough,  $2\theta\beta^{-1} \in H_{E_N}([\lambda_{\min}(E_N) - \eta, \lambda_{\max}(E_N) + \eta]^c)$ , we can find a  $v_N$  satisfying (2.13). Note that  $v_N$  is unique by strict monotonicity of  $H_{E_N}$  on  $] -\infty, \lambda_{\min}(E_N) - \eta[$ , where it is negative, and on  $]\lambda_{\max}(E_N) + \eta, \infty[$ , where it is positive. Therefore,

$$(2\theta)^{-1} + v_N \in [\lambda_{\min}(E_N) - \eta, \lambda_{\max}(E_N) + \eta]^c$$

ensures that

$$1 - \frac{2\theta}{\beta}\lambda_i + \frac{2\theta}{\beta}v_N > \frac{2|\theta|}{\beta}\eta \quad (2.14)$$

so that, because of the uniform continuity of  $H_{E_N}$  on  $[\lambda_{\min}(E_N) - \eta, \lambda_{\max}(E_N) + \eta]^c$ , as  $\hat{\mu}_{E_N}^N$  converges to  $\mu_E$ ,  $v_N$  converges to  $v$  the solution of  $H_{\mu_E}\left(\frac{\beta}{2\theta} + v\right) = \frac{2\theta}{\beta}$  and

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \left( 1 + \frac{2\theta}{\beta}v_N - \frac{2\theta}{\beta}\lambda_i \right) = \int \log \left( 1 + \frac{2\theta}{\beta}v - \frac{2\theta}{\beta}\lambda \right) d\mu_E(\lambda).$$

Furthermore, the computation of the derivative of  $\theta \mapsto \theta v - \frac{\beta}{2} \int \log \left( 1 + \frac{2\theta}{\beta}v - \frac{2\theta}{\beta}\lambda \right) d\mu_E(\lambda)$ , with this particular  $v = R_{\mu_E}(2\theta\beta^{-1})$  allows us to get the explicit expression

$$\theta v - \frac{\beta}{2} \int \log \left( 1 + \frac{2\theta}{\beta}v - \frac{2\theta}{\beta}\lambda \right) d\mu_E(\lambda) = \frac{\beta}{2} \int_0^{\frac{2\theta}{\beta}} R_{\mu_E}(u) du.$$

Therefore, Hypothesis (2.4) together with Lemma 2.2.1.2 finishes the proof of (2.6).

Now the last point is to check that under Hypothesis 2.1.1, the assumption of Lemma 2.2.1.2 is equivalent to  $2\theta/\beta \in H_{\mu_E}([\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^c)$ .

Let us first observe that  $H_{\mu_E}([\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^c) = \bigcup_{\eta > 0} H_{\mu_E}([\lambda_{\min} - \eta, \lambda_{\max} + \eta]^c)$  and that, under Hypothesis 2.1.1,

$$H_{\mu_E}([\lambda_{\min} - 2\eta, \lambda_{\max} + 2\eta]^c) \subset \bigcup_{N_0 \geq 0} \bigcap_{N \geq N_0} H_{E_N}([\lambda_{\min}(E_N) - \eta, \lambda_{\max}(E_N) + \eta]^c),$$

since, for any  $\lambda \in \bigcup_{N_0 \geq 0} \bigcap_{N \geq N_0} \text{supp}(\hat{\mu}_{E_N}^N)$ , the application  $z \mapsto (z - \lambda)^{-1}$  is continuous bounded on  $[\lambda_{\min} - 2\eta, \lambda_{\max} + 2\eta]^c$ . Therefore,  $2\theta/\beta \in H_{\mu_E}([\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^c)$  implies the assumption of Lemma 2.2.1.2.

Conversely, we get by the same arguments that

$$\bigcup_{N_0 \geq 0} \bigcap_{N \geq N_0} H_{E_N}([\lambda_{\min}(E_N) - 2\eta, \lambda_{\max}(E_N) + 2\eta]^c) \subset H_{\mu_E}([\lambda_{\min} - \eta, \lambda_{\max} + \eta]^c),$$

what completes the proof. ■

### 2.2.1 Proof of Lemma 2.2.1

- The first point is trivial since the matrix  $U$  is unitary or orthogonal and hence bounded.
- Let us consider the second point. We now stick to the case  $\beta = 1$  and will summarize at the end of the proof the changes to perform for the case  $\beta = 2$ . We can assume that the  $\{\lambda_1(E_N), \dots, \lambda_N(E_N)\}$  is not reduced to a single point  $\{e\}$  since otherwise the result is straightforward. We write in

short  $I_N(\theta, E_N) = I_N^{(1)}(D_N, E_N)$ . The ideas of the proof are very close to usual large deviations techniques, and in fact in some sense simpler because strong concentration arguments are available for free (cf. (2.15)). Following Fact 2.1.8, we can write, with  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$  the eigenvalues of  $E_N$ ,

$$I_N(\theta, E_N) = \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ N\theta \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i g_i^2}{\sum_{i=1}^N g_i^2} \right\} \right]$$

where the  $g_i$ 's are i.i.d standard Gaussian variables. Now, writing the Gaussian vector  $(g_1, \dots, g_N)$  in its polar decomposition, we realize of course that the spherical integral does not depend on its radius  $r = \|g\|$  which follows the law

$$\rho_N(dr) := Z_N^{-1} r^{N-1} e^{-\frac{1}{2}r^2} dr,$$

with  $Z_N$  the appropriate normalizing constant.

The idea of the proof is now that  $r$  will of course concentrate around  $\sqrt{N}$  so that we are reduced to study the numerator and to make the adequate change of variable so that it concentrates around  $v_N$ . For  $\kappa < 1/2$ , there exists a finite constant  $C(\kappa)$  such that

$$\rho_N \left( \left| \frac{r^2}{N} - 1 \right| \geq N^{-\kappa} \right) \leq C(\kappa) e^{-\frac{1}{4}N^{1-2\kappa}}. \quad (2.15)$$

Such an estimate can be readily obtained by applying standard precise Laplace method to the law  $\tilde{\rho}_N$  of  $(N-2)^{-1}r^2$  which is given by

$$\tilde{\rho}_N(dx) = \tilde{Z}_N^{-1} 1_{x \geq 0} e^{-\frac{N-2}{2}f(x)} dx$$

with  $f(x) = x - \log x$ . Indeed,  $f$  achieves its minimal value at  $x = 1$  so that for any  $\varepsilon > 0$ , there exists  $c(\varepsilon) > 0$  such that  $\tilde{Z}_N \tilde{\rho}_N(|x - 1| > \varepsilon) \leq e^{-c(\varepsilon)N}$ . Now,  $\sigma_\varepsilon = \inf\{f''(x), |x - 1| \leq \varepsilon\} > 0$  so that Taylor expansion results with

$$\tilde{Z}_N \tilde{\rho}_N(|x - 1| \geq N^{-\kappa}) \leq e^{-c(\varepsilon)N} + \int_{y \geq N^{-\kappa}} e^{-\frac{N-2}{2}\sigma_\varepsilon y^2} dy \leq e^{-\frac{\sigma_\varepsilon}{3}N^{1-2\kappa}}$$

where the last inequality holds for  $N$  large enough. A lower bound on  $\tilde{Z}_N$  is obtained similarly by considering  $\tilde{\sigma}_\varepsilon = \sup\{f''(x), |x - 1| \leq \varepsilon\} > 0$  showing that  $\tilde{Z}_N \geq \tilde{c}(\varepsilon)\sqrt{N}^{-1}$ . We conclude by noticing that  $\sigma_\varepsilon$  goes to one as  $\varepsilon$  goes to zero. Note that such a result can also be seen as a direct consequence of section 3.7 in [21].

From this, if we introduce the event  $A_N(\kappa) := \left\{ \left| \frac{\|g\|^2}{N} - 1 \right| \leq N^{-\kappa} \right\}$ , it is not hard to see that for any  $\kappa < \frac{1}{2}$  and for  $N$  large enough (such that  $1 - C(\kappa)e^{-\frac{1}{4}N^{1-2\kappa}} > 0$ ), we have

$$1 \leq \frac{I_N(\theta, E_N)}{\mathbb{E} \left[ 1_{A_N(\kappa)} \exp \left\{ N\theta \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i g_i^2}{\sum_{i=1}^N g_i^2} \right\} \right]} \leq \delta(\kappa, N)$$

where  $\delta(\kappa, N) = \frac{1}{1 - C(\kappa)e^{-\frac{1}{4}N^{1-2\kappa}}}$ . Therefore,

$$\begin{aligned}
I_N(\theta, E_N) &\leq \delta(\kappa, N) \mathbb{E} \left[ 1_{A_N(\kappa)} \exp \left\{ N\theta \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i g_i^2}{\sum_{i=1}^N g_i^2} \right\} \right] \\
&\leq \delta(\kappa, N) e^{N\theta v + N^{1-\kappa} |\theta| (\|E_N\|_\infty + |v|)} \mathbb{E} \left[ 1_{A_N(\kappa)} \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^N \lambda_i g_i^2 - v\theta \sum_{i=1}^N g_i^2 \right\} \right] \quad (2.16)
\end{aligned}$$

for any  $v \in \mathbb{R}$ . Now,

$$\mathbb{E} \left[ 1_{A_N(\kappa)} \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^N \lambda_i g_i^2 - v\theta \sum_{i=1}^N g_i^2 \right\} \right] = \prod_{i=1}^N \left[ \sqrt{1 + 2\theta v - 2\theta \lambda_i} \right]^{-1} P_N(A_N(\kappa)) \quad (2.17)$$

with  $P_N$  the probability measure on  $\mathbb{R}^N$  given by

$$P_N(dg_1, \dots, dg_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N} \prod_{i=1}^N \left[ \sqrt{1 + 2\theta v - 2\theta \lambda_i} e^{-\frac{1}{2}(1+2\theta v-2\theta \lambda_i)g_i^2} dg_i \right]$$

which is well defined provided we choose  $v$  so that

$$1 + 2\theta v - 2\theta \lambda_i > 0 \quad \forall i \text{ from } 1 \text{ to } N. \quad (2.18)$$

Thus, for any such  $v$ 's, we get from (2.16) and (2.17), that for any  $\kappa = \frac{1}{2} - \zeta$  with  $\zeta > 0$  and  $N$  large enough, since  $P_N(A_N(\kappa)) \leq 1$ ,

$$I_N(\theta, E_N) \leq \delta(\kappa, N) \prod_{i=1}^N \left[ \sqrt{1 + 2\theta v - 2\theta \lambda_i} \right]^{-1} e^{N\theta v + N^{1-\kappa} |\theta v|} e^{N^{1-\kappa} |\theta| \|E_N\|_\infty}. \quad (2.19)$$

We similarly obtain the lower bound

$$I_N(\theta, E_N) \geq e^{N\theta v - N^{1-\kappa} |\theta| (\|E_N\|_\infty + |v|)} \prod_{i=1}^N \left[ \sqrt{1 + 2\theta v - 2\theta \lambda_i} \right]^{-1} P_N(A_N(\kappa))$$

Now, we show that we can choose  $v$  wisely so that for  $N \geq N(\kappa)$ ,

$$P_N(A_N(\kappa)) = P_N(|N^{-1} \|g\|^2 - 1| \leq N^{-\kappa}) \geq \frac{1}{2}. \quad (2.20)$$

This will finish the proof, with

$$I_N(\theta, E_N) \geq \frac{1}{2} e^{N\theta v - N^{1-\kappa} |\theta| (\|E_N\|_\infty + |v|)} \prod_{i=1}^N \left[ \sqrt{1 + 2\theta v - 2\theta \lambda_i} \right]^{-1} \quad (2.21)$$

yielding the desired lower bound.

We know that  $P_N$  is a product measure under which

$$\tilde{g}_i = \sqrt{1 + 2\theta v - 2\theta \lambda_i} g_i$$

are i.i.d standard Gaussian variables. Let us now choose  $v = v_N$  in  $-(2\theta)^{-1} + [\lambda_{\min}(E_N) - \eta, \lambda_{\max}(E_N) + \eta]^c$  satisfying

$$\mathbb{E}_{P_N} \left[ \frac{1}{N} \|g\|^2 \right] = \mathbb{E} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{g}_i^2}{1 + 2\theta v_N - 2\theta \lambda_i} \right] = \frac{1}{2\theta} H_{E_N} ((2\theta)^{-1} + v_N) = 1. \quad (2.22)$$

We recall from (2.14) that  $1 - 2\theta \lambda_i + 2\theta v_N > 2|\theta|\eta > 0$  so that all our computations are validated by this final choice.

With this choice of  $v_N$ , we have

$$\mathbb{E}_{P_N} \left[ \left( \frac{1}{N} \|g\|^2 - 1 \right)^2 \right] = \frac{2}{N^2} \sum_{i=1}^N \frac{1}{(1 + 2\theta v_N - 2\theta \lambda_i)^2} \leq \frac{2}{N\theta^2 \eta^2} \quad (2.23)$$

so that by Chebychev's inequality

$$P_N(|N^{-1}\|g\|^2 - 1| \geq N^{-\kappa}) \leq \frac{2}{\eta^2 \theta^2} N^{2\kappa-1},$$

which is smaller than  $2^{-1}$  for sufficiently large  $N$  since  $2\kappa < 1$ , resulting with (2.20). Finally, since by definition

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{1 - 2\theta \lambda_i + 2\theta v_N} = 1$$

with  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq N}$  which do not all take the same value, there exists  $i$  and  $j$  so that

$$-2\theta \lambda_i + 2\theta v_N > 0, \quad -2\theta \lambda_j + 2\theta v_N < 0$$

so that  $v_N \in [\lambda_{\min}(E_N), \lambda_{\max}(E_N)]$ . Thus, (2.21) together with (2.19) give the second point of the lemma for  $\beta = 1$ .

In the case where  $\beta = 2$ , the  $g_i^2$  have to be replaced everywhere by  $g_i^2 + \hat{g}_i^2$  with independent Gaussian variables  $(g_i, \hat{g}_i)_{1 \leq i \leq N}$ . This time, we can concentrate

$$\frac{1}{N} \|g\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{g}_i^2$$

around 2. Everything then follows by dividing  $\theta$  by two and noticing that we will get the same Gaussian integrals squared.

• The last point is an easy consequence of the second since, for any  $\lambda \in \bigcup_{N_0 \geq 0} \bigcap_{N \geq N_0} (\text{supp}(\hat{\mu}_{E_N}^N) \cap \text{supp}(\hat{\mu}_{E_N}^N))$ , the application  $z \mapsto (z - \lambda)^{-1}$  is continuous bounded (with norm depending on  $\eta$ ) on  $\bigcup_{N_0 \geq 0} \bigcap_{N \geq N_0} [\lambda_{\min}(E_N) - \eta, \lambda_{\max}(E_N) + \eta]^c$ . ■

### 2.2.2 Generalisation of the method to the multi-dimensional case

In the sequel, we want to apply the strategy we used above to show Theorem 2.1.7, that is to say study the behaviour of the spherical integrals as the rank of  $D_N$  remains negligible compared to  $\sqrt{N}$ . In this case and if all the eigenvalues of  $D_N$  are small enough, we show that it behaves like a product, namely that we have the equality (2.11). To lighten the notations, we let  $\theta_i := \theta_i^N$ , for all  $i \leq M(N)$ .

We will rely again on Fact 2.1.8 and write in the case  $\beta = 1$ ,

$$I_N(D_N, E_N) = \mathbb{E} \left[ \exp \left\{ N \sum_{m=1}^M \theta_m \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i (\tilde{g}_i^{(m)})^2}{\sum_{i=1}^N (\tilde{g}_i^{(m)})^2} \right\} \right], \quad (2.24)$$

where the expectation is taken under the standard Gaussian measure and the vectors  $(\tilde{g}^{(1)}, \dots, \tilde{g}^{(M)})$  are obtained from the Gaussian vectors  $(g^{(1)}, \dots, g^{(M)})$  by a standard Schmidt orthogonalisation procedure.

This means that there exists a lower triangular matrix  $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq M}$  such that for any integer  $m$  between 1 and  $M$ ,

$$\tilde{g}^{(m)} = g^{(m)} + \sum_{j=1}^{m-1} A_{mj} g^{(j)}$$

and the  $A_{ij}$ 's are solutions of the following system : for all  $p$  from 1 to  $m-1$ ,

$$\langle g^{(m)}, g^{(p)} \rangle + \sum_{j=1}^{m-1} A_{mj} \langle g^{(j)}, g^{(p)} \rangle = 0, \quad (2.25)$$

with  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  the usual scalar product in  $\mathbb{R}^N$ .

Therefore, if we denote, for  $i$  and  $j$  between 1 and  $M$ , with  $i \leq j$ ,

$$X_N^{ij} := \frac{1}{N} \langle g^{(i)}, g^{(j)} \rangle$$

and

$$Y_N^{ij} := \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \lambda_l g_l^{(i)} g_l^{(j)},$$

then, for each  $m$  from 1 to  $M$ , there exists a rational function  $F_m : \mathbb{R}^{m(m+1)} \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$\frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i (\tilde{g}_i^{(m)})^2}{\sum_{i=1}^N (\tilde{g}_i^{(m)})^2} = F_m((X_N^{ij}, Y_N^{ij})_{1 \leq i \leq j \leq m}) \quad (2.26)$$

and a rational function  $G_m : \mathbb{R}^{\frac{m(m+1)}{2}} \rightarrow \mathbb{R}$  such that

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{g}_i^{(m)})^2 = G_m((X_N^{ij})_{1 \leq i \leq j \leq m}). \quad (2.27)$$

We now adopt the following system of coordinates in  $\mathbb{R}^{MN}$  :  $r_1, \alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_{N-1}^{(1)}$  are the polar coordinates of  $g^{(1)}$ ,  $r_2 := \|g^{(2)}\|$ ,  $\beta_2$  is the angle between  $g^{(1)}$  and  $g^{(2)}$ ,  $\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_{N-2}^{(2)}$  are the angles



needed to spot  $g^{(2)}$  on the cone of angle  $\beta_2$  around  $g^{(1)}$ , then  $r_3 := \|g^{(3)}\|$ ,  $\beta_3^i$  the angle between  $g^{(3)}$  and  $g^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) and  $\alpha_1^{(3)}, \dots, \alpha_{N-3}^{(3)}$  the angles needed to spot  $g^{(3)}$  on the intersection of the two cones...etc...

Then observe that  $F_m((X_N^{ij}, Y_N^{ij})_{1 \leq i \leq j \leq m})$  depends only on the  $\alpha$ 's (because the  $\frac{\bar{g}^{(i)}}{\|\bar{g}^{(i)}\|}$  do) whereas  $G_m((X_N^{ij})_{1 \leq i \leq j \leq m})$  depends on the  $r$ 's and the  $\beta$ 's. Therefore, if we consider the event

$$B_N(\kappa) := \left\{ \forall i, \quad |X_N^{ii} - 1| \leq N^{-\kappa}, \quad \forall i \neq j \quad |X_N^{ij}| \leq N^{-\kappa} \right\},$$

then, as in the case of rank one, we can write that

$$I_N(D_N, E_N) \leq \mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{B_N(\kappa)} e^{N \sum_{m=1}^M \theta_m F_m(X_N^{ij}, Y_N^{ij})} \right] + P(B_N(\kappa)^c) I_N(D_N, E_N). \quad (2.28)$$

Now we claim that, for  $N$  large enough, for any  $\kappa > 0$ , there exists an  $\alpha > 0$  such that

$$P(B_N(\kappa)^c) \leq C'(\kappa) e^{-\alpha N^{1-2\kappa}}. \quad (2.29)$$

Indeed, as in (2.15),

$$\begin{aligned} P(B_N(\kappa)^c) &\leq \sum_{i=1}^M P(|X_N^{ii} - 1| > N^{-k}) + \sum_{i,j=1}^M P(|X_N^{ij}| > N^{-k}) \\ &\leq c_1(\kappa) M e^{-\frac{1}{4} N^{1-2\kappa}} + c_2(\kappa) M^2 e^{-\frac{1}{2} N^{1-2\kappa}}, \end{aligned}$$

what gives immediately (2.29).

Now, as far as  $\kappa < \frac{1}{2}$ , (2.28) together with (2.29) give

$$1 \leq \frac{I_N(D_N, E_N)}{\mathbb{E} \left[ \mathbf{1}_{B_N(\kappa)} e^{N \sum_{m=1}^M \theta_m F_m(X_N^{ij}, Y_N^{ij})} \right]} \leq 1 + \varepsilon(N, k),$$

with  $\varepsilon(N, k)$  going to zero.

We now want to expand  $F_M$  on  $B_N(\kappa)$  as we did in the previous subsection.

As the  $A_{ij}$ 's satisfy the linear system (2.25), we can write the Cramer's formulas corresponding to it and get

$$A_{ij} = \frac{\det(R_N^{kl})_{1 \leq k, l \leq i-1}}{\det(X_N^{kl})_{1 \leq k, l \leq i-1}},$$

where

$$R_N^{kl} = \begin{cases} X_N^{kl}, & \text{if } l \neq j \\ -X_N^{ki} & \text{if } l = j. \end{cases}$$

Now, we look at the denominator and can show that

$$\det(X_N^{kl})_{1 \leq k, l \leq i-1} \geq 1 - \sum_{s=1}^{i-1} (MN^{-\kappa})^s \geq \frac{1}{2},$$

where the last inequality holds for  $N$  large enough as far as  $M = o(N^\kappa)$ .

We now go to the numerator : expanding over the  $j$ th column, we get this time that

$$\det(R_N^{kl})_{1 \leq k, l \leq i-1} \leq N^{-\kappa} + (M-1)N^{-2\kappa} \sum_{s=1}^{i-1} (MN^{-\kappa})^s \leq cN^{-\kappa},$$

where again the last equality holds as far as  $M = o(N^\kappa)$  and  $c$  is a fixed constant.

From the two last inequalities, we have that, on  $B_N(\kappa)$ ,  $\sup_{i < j} |A_{ij}| \leq c' N^{-\kappa}$ .

From that we can easily deduce that, for any  $m$  less than  $M$ , we have

$$\frac{1}{N} \left\| \tilde{g}^{(m)} - g^{(m)} \right\|^2 \leq \frac{1}{N} \sum_{i,j=1}^{m-1} |A_{mj} A_{mi}| |\langle g^{(i)}, g^{(j)} \rangle|^2 \leq c'' N^{-2\kappa} (M^2 N^{-2\kappa} + M) \leq c_3 N^{-\kappa}.$$

From these estimations and (2.24), for any  $v_j^N$ , we get the following upper bound :

$$\begin{aligned} I_N(D_N, E_N) &\leq (1 + \varepsilon(\kappa, N)) \exp \left\{ N \sum_{j=1}^M \theta_j v_j^N \right\} \\ &\quad \mathbb{E} \left[ 1_{B_N(\kappa)} \prod_{j=1}^M \exp \left\{ N \theta_j \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i (\tilde{g}_i^{(j)})^2 - v_j^N \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\tilde{g}_i^{(j)})^2}{1 + \frac{1}{N} (\|\tilde{g}^{(j)}\|^2 - \|g^{(j)}\|^2) + (\frac{1}{N} \|g^{(j)}\|^2 - 1)} \right\} \right] \\ &\leq (1 + \varepsilon(\kappa, N)) \exp \left\{ N \sum_{j=1}^M \theta_j v_j^N \right\} \\ &\quad \mathbb{E} \left[ 1_{B_N(\kappa)} \prod_{j=1}^M \exp \left\{ \left( \theta_j \sum_{i=1}^N \lambda_i (\tilde{g}_i^{(j)})^2 - v_j^N \theta_j \sum_{i=1}^N (\tilde{g}_i^{(j)})^2 \right) [1 + c_4 N^{-\kappa}] \right\} \right] \\ &\leq (1 + \varepsilon(\kappa, N)) \exp \left\{ N \sum_{j=1}^M \theta_j v_j^N \right\} \exp \left\{ C \sup |\theta_j| (\|E_N\|_\infty + \sup |v_j^N|) M N^{1-\kappa} \right\} \\ &\quad \mathbb{E} \left[ \prod_{j=1}^M \exp \left\{ \theta_j \sum_{i=1}^N \lambda_i (g_i^{(j)})^2 - v_j^N \sum_{i=1}^N (g_i^{(j)})^2 \right\} \right]. \end{aligned}$$

where  $C$  is again a fixed constant.

From the hypotheses of Theorem 2.1.7, we know that there exists an  $N$  such that  $2\theta_j \in H_{E_N}([\lambda_{\min}(E_N) - \eta, \lambda_{\max}(E_N) + \eta]^c)$ , from which we can easily deduce that  $|2\theta_j| \leq \eta^{-1}$ . Moreover, as in the proof of Lemma 2.2.1.2,  $|v_j^N| \leq \|E_N\|_\infty$  is uniformly bounded. Therefore, we get

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{NM(N)} \log I_N(D_N, E_N) \leq \int I_{\mu_E}(\theta) d\mu_D(\theta).$$

We also get a similar lower bound and conclude similarly to the preceding subsection by considering the shifted probability measure  $P_N^{\theta_1, \dots, \theta_M} = \otimes_{j=1}^M P_N^{\theta_j}$  where

$$P_N^{\theta_j}(dg_1, \dots, dg_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N} \prod_{i=1}^N \sqrt{1 + 2\theta_j v_j^N - 2\theta_j \lambda_i} e^{-\frac{1}{2}(1 + 2\theta_j v_j^N - 2\theta_j \lambda_i) g_i^2} dg_i.$$

This concludes the proof of Theorem 2.1.7. ■

### 2.3 Central limit theorem in the case of rank one

Under the hypotheses of Theorem 2.1.2,  $v_N$  (defined by (2.13)) is converging to  $v = R_{\mu_E}\left(\frac{2\theta}{\beta}\right)$  and we established that the spherical integral is converging to  $\theta v - \frac{\beta}{2} \int \log(1 + \frac{2\theta}{\beta} v - \frac{2\theta}{\beta} \lambda) d\mu_E(\lambda)$ . In the case where the fluctuations of the eigenvalues do not interfere, we can get sharper estimates, given, in the case  $\beta = 1$ , by Theorem 2.1.3. This section is devoted to its proof, namely the study of the behaviour of  $e^{-N(\theta R_{\mu_E}(2\theta) - \frac{1}{2N} \sum \log(1 + 2\theta R_{\mu_E}(2\theta) - 2\theta \lambda_i))} I_N(\theta, E_N)$ .

#### Proof of Theorem 2.1.3

- We first treat the non degenerate case  $\mu_E \neq \delta_e$ .

Let us first make an important remark : the hypothesis that  $d(\hat{\mu}_{E_N}^N, \mu_E) = o(\sqrt{N}^{-1})$  has the two following consequences :

$$|v - v_N| = o(\sqrt{N}^{-1}) \quad (2.30)$$

$$\text{and } \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{N}(H_{E_N} - H_{\mu_E})(K_{\mu_E}(2\theta)) = 0. \quad (2.31)$$

Indeed, since  $2\theta \in H_{\mu_E}([\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^c)$ , there is an  $\eta > 0$ , such that, for  $N$  large enough,  $2\theta \in H_{E_N}([\lambda_{\min}(E_N) - \eta, \lambda_{\max}(E_N) + \eta]^c)$ . Therefore, as for any  $\lambda$  which is in  $\text{supp}(\hat{\mu}_{E_N}^N)$  for  $N$  large enough,  $z \mapsto (z - \lambda)^{-1}$  is uniformly bounded and Lipschitz on  $\bigcap_{N \geq N_0} [\lambda_{\min}(E_N) - \eta, \lambda_{\max}(E_N) + \eta]^c$ , we get directly (2.30), and also (2.31) as we know that  $K_{\mu_E}(2\theta) \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^c$ .

For  $v = R_{\mu_E}(2\theta)$ , we set

$$\gamma_N = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i^2 - 1 \right) \text{ and } \hat{\gamma}_N = \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i g_i^2 - v \right).$$

Let us also define for  $\varepsilon > 0$

$$I_N^\varepsilon(\theta, E_N) := \int_{|\gamma_N| \leq \varepsilon, |\hat{\gamma}_N| \leq \varepsilon} \exp \left\{ \theta N \frac{\hat{\gamma}_N + v}{\gamma_N + 1} \right\} \prod_{i=1}^N dP(g_i),$$

with  $P$  the standard Gaussian probability measure on  $\mathbb{R}$ . We claim that, for any  $\zeta > 0$ , for  $N$  large enough,

$$|I_N(\theta, E_N) - I_N^\varepsilon(\theta, E_N)| \leq e^{-N^{1-\zeta}} I_N(\theta, E_N). \quad (2.32)$$

Indeed, consider

$$\mu_N^\theta(dg) = \frac{1}{I_N(\theta, E_N)} \exp \left\{ \theta N \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i g_i^2}{\sum_{i=1}^N g_i^2} \right\} \prod_{i=1}^N dP(g_i).$$

(2.32) is implied by

$$\mu_N^\theta(|\gamma_N| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{2} e^{-N^{1-\zeta}} \text{ and } \mu_N^\theta(|\hat{\gamma}_N| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{2} e^{-N^{1-\zeta}} \quad (2.33)$$

The first inequality is trivial since by (2.15), for  $\kappa < \frac{1}{2}$ ,

$$\mu_N^\theta(|\gamma_N| \geq N^{-\kappa}) = \rho_N \left( \left| \frac{r^2}{N} - 1 \right| \geq N^{-\kappa} \right) \leq e^{-\frac{1}{4} N^{1-2\kappa}}.$$

To show the second point, following the proof of Lemma 2.2.1, we find a finite constant  $C(\kappa)$  so that

$$\mu_N^\theta (|\hat{\gamma}_N| \geq \varepsilon) \leq C(\kappa) e^{C(\kappa)N^{1-\kappa} \|\|E_N\|_\infty} P_N (|\hat{\gamma}_N| \geq \varepsilon)$$

where under  $P_N$  the  $g_i$  are independent centered Gaussian variable with variance  $(1-2\theta\lambda_i+2\theta v_N)^{-1}$ . Hence

$$P_N (|\hat{\gamma}_N| \geq \varepsilon) = P^{\otimes N} \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{1-2\theta\lambda_i+2\theta v_N} \tilde{g}_i^2 - v \right| \geq \varepsilon \right).$$

Let us denote  $\tilde{E}_N = \varphi_{v_N}(E_N)$  with  $\varphi_v(x) = x(1-2\theta x+2\theta v)^{-1}$ . Then, the spectral measure of  $\tilde{E}_N$  converges towards  $\mu_{\tilde{E}} := \varphi_v \# \mu_E$  since  $v_N$  converges towards  $v$  (see (2.30)). Moreover  $\lambda_{\min}(\tilde{E}_N)$  and  $\lambda_{\max}(\tilde{E}_N)$  converge. Hence, we can apply Proposition 2.5.1 to obtain a large deviation principle for the law of  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i(\tilde{E}_N) \tilde{g}_i^2$  under  $P^{\otimes N}$  with good rate function  $L(z) \frac{1}{2} h_z(K_{\mu_E}(Q_{\mu_E}(z)))$ . Following the proof of Lemma 2.5.8,  $L$  has a unique minimizer which is

$$z_0 = R_{\mu_{\tilde{E}}}(0) = \int \frac{\lambda}{1-2\theta\lambda+2\theta v} d\mu_E(\lambda) = v.$$

As a consequence, for  $\varepsilon > 0$ , there exists  $\delta(\varepsilon) > 0$  so that for  $N$  large enough

$$P^{\otimes N} \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{1-2\theta\lambda_i+2\theta v_N} \tilde{g}_i^2 - v \right| > \varepsilon \right) \leq e^{-\delta(\varepsilon)N}.$$

This completes the proof of (2.33).

We now deal with  $I_N^\varepsilon(\theta, E_N)$ . We use the expansion  $\frac{1}{1+\gamma_N} = 1 - \gamma_N + \frac{\gamma_N^2}{1+\gamma_N}$  to get that

$$I_N^\varepsilon(\theta, E_N) = e^{N\theta v} \int_{|\gamma_N| \leq \varepsilon, |\hat{\gamma}_N| \leq \varepsilon} \exp \left\{ -\theta N \gamma_N \frac{\hat{\gamma}_N - v\gamma_N}{\gamma_N + 1} \right\} \exp \{ \theta N (\hat{\gamma}_N - v\gamma_N) \} \prod_{i=1}^N dP(g_i).$$

We note that

$$\exp \{ \theta N (\hat{\gamma}_N - v\gamma_N) \} \prod_{i=1}^N dP(g_i) = \prod_{i=1}^N \left[ \sqrt{1+2\theta v-2\theta\lambda_i} \right]^{-1} \prod_{i=1}^N dP_i(g_i)$$

with  $P_i$  the centered Gaussian probability measure

$$dP_i(x) = \sqrt{(2\pi)^{-1}(1+2\theta v-2\theta\lambda_i)} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(1+2\theta v-2\theta\lambda_i)x^2 \right\} dx.$$

We have that

$$1+2\theta v-2\theta\lambda_i = 2\theta(K_{\mu_E}(2\theta) - \lambda_i) \tag{2.34}$$

and we know that  $K_{\mu_E}(2\theta) \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^c$ . Further, arguing as in (2.14), we find, for any given  $\theta > 0$ , a constant  $\eta_\theta > 0$  such that

$$\inf_{1 \leq i \leq N} (1+2\theta v-2\theta\lambda_i) > \eta_\theta$$

insuring that the  $P_i$  are well defined. Therefore,

$$I_N^\varepsilon(\theta, E_N) = e^{N\theta v - \frac{N}{2} \int \log(2\theta(K_{\mu_E}(2\theta) - \lambda)) d\hat{\mu}_{E_N}(\lambda)} \int_{|\gamma_N| \leq \varepsilon, |\hat{\gamma}_N| \leq \varepsilon} \exp\left\{-\theta N \gamma_N \frac{\hat{\gamma}_N - v \gamma_N}{\gamma_N + 1}\right\} \prod_{i=1}^N dP_i(g_i) \quad (2.35)$$

Now, under  $\prod_{i=1}^N dP_i(g_i)$ ,  $(\sqrt{N}\gamma_N, \sqrt{N}\hat{\gamma}_N)$  converges in law towards a centered two-dimensional Gaussian variables  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  as soon as their covariances converge. We investigate this convergence.

Hereafter, we shall write  $g_i = (1 + 2\theta(v - \lambda_i))^{-\frac{1}{2}} \tilde{g}_i$  with standard independent Gaussian variables  $\tilde{g}_i$ . Then,

$$\mathbb{E}((\sqrt{N}\gamma_N)^2) = N \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{g}_i^2 - 1}{1 + 2\theta v - 2\theta \lambda_i} + \frac{1}{2\theta} (H_{E_N} - H_{\mu_E})(K_{\mu_E}(2\theta)) \right)^2 \right]$$

where we used that

$$2\theta = H_{\mu_E}(K_{\mu_E}(2\theta)) = \int \frac{1}{K_{\mu_E}(2\theta) - \lambda} d\mu_E(\lambda), \quad (2.36)$$

and (2.34). Equation (2.31) implies

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}((\sqrt{N}\gamma_N)^2) &= \lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E} \left[ \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\tilde{g}_i^2 - 1}{1 + 2\theta v - 2\theta \lambda_i} \right)^2 \right] \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{(1 + 2\theta v - 2\theta \lambda_i)^2} \\ &= \frac{1}{2\theta^2} \int \frac{1}{(K_{\mu_E}(2\theta) - \lambda)^2} d\mu_E(\lambda) := \frac{Z}{2\theta^2}, \end{aligned}$$

where the above convergence holds since  $K_{\mu_E}(2\theta)$  lies outside  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  and therefore outside the support of  $\mu_E$ .

Similar computations give that under the same hypotheses,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}((\sqrt{N}\hat{\gamma}_N)^2) = \frac{1}{2\theta^2} \int \frac{\lambda^2}{(K_{\mu_E}(2\theta) - \lambda)^2} d\mu_E(\lambda)$$

and that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\sqrt{N}\hat{\gamma}_N \sqrt{N}\gamma_N) = \frac{1}{2\theta^2} \int \frac{\lambda}{(K_{\mu_E}(2\theta) - \lambda)^2} d\mu_E(\lambda).$$

Therefore, provided that the Gaussian integral is well defined, we find that

$$I_N(\theta, E_N) = e^{N\theta v - \frac{N}{2} \int \log(2\theta(K_{\mu_E}(2\theta) - \lambda)) d\hat{\mu}_{E_N}^N(\lambda)} \int \exp\{-\theta x(y - vx)\} d\Gamma(x, y) (1 + o(1)), \quad (2.37)$$

with  $\Gamma$  a centered Gaussian measure on  $\mathbb{R}^2$  with covariance matrix

$$R = \frac{1}{2\theta^2} \begin{bmatrix} \int \frac{1}{(K_{\mu_E} - \lambda)^2} d\mu_E(\lambda) & \int \frac{\lambda}{(K_{\mu_E} - \lambda)^2} d\mu_E(\lambda) \\ \int \frac{\lambda}{(K_{\mu_E} - \lambda)^2} d\mu_E(\lambda) & \int \frac{\lambda^2}{(K_{\mu_E} - \lambda)^2} d\mu_E(\lambda) \end{bmatrix},$$

where we used the notation  $K_{\mu_E} := K_{\mu_E}(2\theta)$ .

Following the ideas of [11] (see Appendix to this chapter for more details in our case), we know that there is one step needed to justify this derivation, namely to check that the Gaussian integral in (2.37) is finite. If we set  $D := 4\theta^4 \det R$ , then, using the relation (2.36), one finds that  $D = Z - 4\theta^2$ , and that the Gaussian integral in (2.37) equals

$$\frac{\theta^2}{\pi\sqrt{D}} \int \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 K_{i,j} x_i x_j\right) dx_1 dx_2,$$

where the matrix  $K$  equals

$$K = \theta \begin{bmatrix} -2v & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + R^{-1} = \frac{2\theta^2}{D} \begin{bmatrix} \int \frac{\lambda^2}{(K_{\mu_E} - \lambda)^2} d\mu_E(\lambda) - \frac{(K_{\mu_E} - \frac{1}{2\theta})D}{\theta} & -\int \frac{\lambda}{(K_{\mu_E} - \lambda)^2} d\mu_E(\lambda) + \frac{D}{2\theta} \\ -\int \frac{\lambda}{(K_{\mu_E} - \lambda)^2} d\mu_E(\lambda) + \frac{D}{2\theta} & \int \frac{1}{(K_{\mu_E} - \lambda)^2} d\mu_E(\lambda) \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Our task is to verify that  $K$  is positive definite. It is enough to check that  $K_{11} > 0$  and  $\det K > 0$ . Re-expressing  $K_{11}$ , one finds that

$$\begin{aligned} K_{11} &= \frac{2\theta^2}{D} \left(1 - 4\theta K_{\mu_E} + K_{\mu_E}^2 Z - \frac{1}{\theta} (Z - 4\theta^2) \left(K_{\mu_E} - \frac{1}{2\theta}\right)\right) \\ &= \frac{2\theta^2}{D} \left(\left(K_{\mu_E} - \frac{1}{2\theta}\right)^2 Z + \frac{Z}{4\theta^2} - 1\right) \end{aligned}$$

But Schwarz's inequality applied to (2.36) yields that  $Z > 4\theta^2$  as soon as  $\mu_E$  is not degenerate, implying that

$$K_{11} > \left(K_{\mu_E} - \frac{1}{2\theta}\right)^2 Z \geq 0,$$

as needed. Turning to the evaluation of the determinant, note that

$$\det K = \frac{4\theta^4}{D^2} Z \left(\frac{Z}{4\theta^2} - 1\right) > 0,$$

where the last inequality is again due to (2.36).

• Let us finally consider the case  $\mu_E = \delta_e$ . In this case,  $H_{\mu_E}(x) = (x-e)^{-1}$  and  $K_{\mu_E}(x) = x^{-1} + e$ ,  $v = e$  (note also that  $Z$  in Theorem 2.1.3.1 is equal to  $4\theta^2$ ). We can follow the previous proof but then

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[(\sqrt{N}(\hat{\gamma}_N - v\gamma_N))^2] = 0.$$

From here, we argue again using [11] that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[1_{|\gamma_N| \leq \varepsilon, |\hat{\gamma}_N - v\gamma_N| \leq \varepsilon} e^{-\theta(1+\gamma_N)^{-1} \sqrt{N}\gamma_N \sqrt{N}(\hat{\gamma}_N - v\gamma_N)}] = 1$$

which completes the proof of Theorem 2.1.3. ■

## 2.4 Extension of the results to the complex plane

In this section, we would like to extend the results of section 2.2 to the case where  $\theta$  is complex, that is to show Theorem 2.1.4.

As in the real case, we first would like to write that

$$I_N(\theta, E_N) = \prod_{i=1}^N \sqrt{\zeta_i} \int \exp \left\{ \theta N \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i \zeta_i g_i^2}{\sum_{i=1}^N \zeta_i g_i^2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \zeta_i g_i^2 \right\} \prod_{i=1}^N dg_i, \quad (2.39)$$

with  $\zeta_i = \frac{1}{1 + 2\theta v - 2\theta \lambda_i}$ , for  $v$  such that  $\operatorname{Re}(\zeta_i) > 0$ ,  $\forall i$  with  $1 \leq i \leq N$ .

This is a direct consequence of the following lemma

**Lemma 2.4.1** *For any function  $f : \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}$  which is invariant by  $x \mapsto -x$ , analytic outside 0 and bounded on  $\{z = x + iy \in \mathbb{C} / |y| < x\}^N$  and for any  $(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$  such that  $\operatorname{Re}(\zeta_i) > 0$  for any  $i$  from 1 to  $N$ , we have that*

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_N &:= \int f(g_1, \dots, g_N) e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N g_i^2} \prod_{i=1}^N dg_i \\ &= \prod_{i=1}^N \sqrt{\zeta_i} \int f(\sqrt{\zeta_1} g_1, \dots, \sqrt{\zeta_N} g_N) e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \zeta_i g_i^2} \prod_{i=1}^N dg_i, \end{aligned}$$

with  $\sqrt{\cdot}$  is the principal branch of the square root in  $\mathbb{C}$ .

**Proof of Lemma 2.4.1 :**

We denote by  $r_j$  the modulus of  $\zeta_j$  and  $\alpha_j$  its phase ( $\zeta_j = r_j e^{i\alpha_j}$ ).

As  $f$  is bounded on  $\mathbb{R}^N$ , dominated convergence gives that

$$\mathcal{J}_N = \lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \int_{[-R, R]^N \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]^N} f(g_1, \dots, g_N) e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N g_i^2} \prod_{i=1}^N dg_i.$$

Thanks to invariance of  $f$  by  $x \mapsto -x$ , we also have that

$$\mathcal{J}_N = \lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} 2^N \int_{[\varepsilon, R]^N} f(g_1, \dots, g_N) e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N g_i^2} \prod_{i=1}^N dg_i.$$

For each  $j$  between 1 and  $N$  and  $R \in \mathbb{R}^+$ , we define the following segments in  $\mathbb{C}$  :

$$\mathcal{C}_{R, \varepsilon}^j := \left\{ r e^{i \frac{\alpha_j}{2}} ; \varepsilon \leq r \leq R \right\},$$

and the following arc of circles

$$\mathcal{D}_\varepsilon^j := \left\{ \varepsilon e^{i\alpha} ; 0 \leq \alpha \leq \frac{\alpha_j}{2} \right\} \text{ and } \mathcal{D}_R^j := \left\{ R e^{i\alpha} ; 0 \leq \alpha \leq \frac{\alpha_j}{2} \right\},$$

so that, for each  $j$ ,  $[\varepsilon, R]$  run from  $\varepsilon$  to  $R$  followed by  $\mathcal{D}_R^j$  run counterclockwise, followed by  $\mathcal{C}_{R,\varepsilon}^j$  run from  $Re^{i\frac{\alpha_j}{2}}$  to  $\varepsilon e^{i\frac{\alpha_j}{2}}$  followed by  $\mathcal{D}_\varepsilon^j$  run clockwise form a closed path.

Therefore, if we let

$$\begin{aligned} f_1^{x_2, \dots, x_N} : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ x &\mapsto f(x, x_2, \dots, x_N), \end{aligned}$$

then for any  $(x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{C}^{N-1}$ ,  $x \mapsto f_1^{x_2, \dots, x_N}(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$  is analytic inside the contour  $[\varepsilon, R] \cup \mathcal{D}_R^j \cup \mathcal{C}_{R,\varepsilon}^j \cup \mathcal{D}_\varepsilon^j$ , so that Cauchy's theorem implies

$$\begin{aligned} \int_{[\varepsilon, R]} f_1^{g_2, \dots, g_N}(g_1)e^{-\frac{1}{2}g_1^2} dg_1 &= \int_{\mathcal{C}_{R,\varepsilon}^1} f_1^{g_2, \dots, g_N}(g_1)e^{-\frac{1}{2}g_1^2} dg_1 \\ &\quad - \int_{\mathcal{D}_R^1} f_1^{g_2, \dots, g_N}(g_1)e^{-\frac{1}{2}g_1^2} dg_1 + \int_{\mathcal{D}_\varepsilon^1} f_1^{g_2, \dots, g_N}(g_1)e^{-\frac{1}{2}g_1^2} dg_1. \end{aligned}$$

If we denote by

$$J_{N,R}^1 = \int_{[\varepsilon, R]^{N-1}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^N g_i^2} \int_{\mathcal{D}_R^1} f_1^{g_2, \dots, g_N}(g_1)e^{-\frac{1}{2}g_1^2} dg_1 \dots dg_N,$$

we have that

$$\begin{aligned} |J_{N,R}^1| &= \int_{[\varepsilon, R]^{N-1}} \int_0^{\frac{\alpha_1}{2}} f(g_1, \dots, g_N)e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^N g_i^2} Re^{-\frac{1}{2}R^2 \cos(2u_1)} du_1 dg_2 \dots dg_N \\ &\leq \|f\|_\infty \sqrt{2\pi}^N \frac{\alpha_1}{2} Re^{-\frac{1}{2}R^2 \cos(\alpha_1)}. \end{aligned}$$

As  $\cos(\alpha_1) > 0$ , we have that for any  $\varepsilon$ ,  $\lim_{R \rightarrow \infty} |J_{N,R}^1| = 0$ .

In the same way, if we let

$$L_{N,\varepsilon}^1 = \int_{[\varepsilon, R]^{N-1}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=2}^N g_i^2} \int_{\mathcal{D}_\varepsilon^1} f_1^{g_2, \dots, g_N}(g_1)e^{-\frac{1}{2}g_1^2} dg_1 \dots dg_N,$$

then we have that

$$|L_{N,\varepsilon}^1| \leq \|f\|_\infty \sqrt{2\pi}^N \varepsilon \frac{\alpha_1}{2},$$

so that  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} |L_{N,\varepsilon}^1| = 0$ .

By doing the same computation for each variable, we get that

$$\lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \int_{[\varepsilon, R]^N} f(g_1, \dots, g_N)e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N g_i^2} \prod_{i=1}^N dg_i = \lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \int_{\prod_{i=1}^N \mathcal{C}_{R,\varepsilon}^1} f(g_1, \dots, g_N)e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^N g_i^2} \prod_{i=1}^N dg_i.$$

The last step is to make the change of variable in  $\mathbb{R}$  which consist in letting  $\tilde{g}_j = \sqrt{r_j}g_j$  to get the result announced in the lemma 2.4.1 and therefore the formula (2.39).  $\blacksquare$

We now go back to the **proof of Theorem 2.1.4** and proceed as in section 2.2. We let

$$\gamma_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \zeta_i g_i^2 - 1 \text{ and } \hat{\gamma}_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i \zeta_i g_i^2 - v(\theta),$$



with  $v(\theta) = R_{\mu_E}(2\theta)$ , which, for  $|\theta|$  small enough, is well defined and such that  $\operatorname{Re}\zeta_i > 0$ , by virtue of Property 2.1.12 and Proposition 2.1.13.

Therefore, we find that

$$I_N(\theta, E_N) = \prod_{i=1}^N \sqrt{\zeta_i} e^{N\theta v} \int \exp \left\{ N\theta \frac{\gamma_N(v\gamma_N - \hat{\gamma}_N)}{1 + \gamma_N} \right\} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N g_i^2} \prod_{i=1}^N dg_i, \quad (2.40)$$

which is almost similar to what we got in (2.35) except that in the complex plane this is not so easy to “localize” the integral around 0 as we did before.

Our goal is now to show that  $\lim_{N \rightarrow \infty} \int \exp \left\{ N\theta \frac{\gamma_N(v(\theta)\gamma_N - \hat{\gamma}_N)}{1 + \gamma_N} \right\} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N g_i^2} \prod_{i=1}^N dg_i$  exists and is not null.

Denote  $\gamma_N = u_1^N + iu_2^N - 1$  and  $\hat{\gamma}_N = v_1^N + iv_2^N - v(\theta)$ , and let

$$X^N := (u_1^N, u_2^N, v_1^N, v_2^N) - X_0 = \left( \int \zeta_1(\lambda) x^2 d\hat{\mu}^N(x, \lambda), \dots, \int \zeta_4(\lambda) x^2 d\hat{\mu}^N(x, \lambda) \right) - X_0$$

with  $d\hat{\mu}^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i, g_i}$ ,

$$\zeta_1(\lambda) = \operatorname{Re}((1 + 2v(\theta)\theta - 2\theta\lambda)^{-1}), \quad \zeta_2(\lambda) = \operatorname{Im}((1 + 2v(\theta)\theta - 2\theta\lambda)^{-1}),$$

$$\zeta_3(\lambda) = \operatorname{Re}(\lambda(1 + 2v(\theta)\theta - 2\theta\lambda)^{-1}), \quad \zeta_4(\lambda) = \operatorname{Im}(\lambda(1 + 2v(\theta)\theta - 2\theta\lambda)^{-1})$$

$$\text{and } X_0 = (1, 0, \operatorname{Re}(v(\theta)), \operatorname{Im}(v(\theta))).$$

Then, we easily see as in [7] (cf Lemma 4.1 therein) that the law of  $X^N$  under  $\prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}g_i^2} dg_i$  satisfies a large deviation principle on  $\mathbb{R}^4$  with rate function

$$\Lambda^*(X) = \sup_{\substack{Y \in \mathbb{R}^4 \\ 1 - 2\langle \zeta(\lambda), Y \rangle \geq 0 \mu_E}} \left\{ \langle Y, X + X_0 \rangle + \frac{1}{2} \int \log(1 - 2\langle \zeta(\lambda), Y \rangle) d\mu_E(\lambda) \right\}, \quad \text{a.s.}$$

with  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  the usual scalar product on  $\mathbb{R}^4$ .

We denote

$$F(X^N) := \theta \frac{\gamma_N(v\gamma_N - \hat{\gamma}_N)}{1 + \gamma_N} = F_1(X^N) + iF_2(X^N)$$

with  $F_1$  and  $F_2$  respectively the real and imaginary part of  $F$ . With these notations, our problem boils down to show that  $\mathbb{E}[e^{NF(X^N)}]$  converges towards a non-zero limit. Following [6], we know that it is enough for us to check that

1. there is a vector  $X^*$  so that  $F(X^*) = 0$  and

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \log \mathbb{E}[e^{NF_1(X^N)}] - \frac{1}{N} \log \mathbb{E}[1_{|X^N - X^*| \leq \frac{M}{\sqrt{N}}} e^{NF_1(X^N)}] \right) = 0.$$

To prove this, the main part of the work will be to show that

a)  $X^*$  is the unique minimizer of  $\Lambda^* - F_1$  (This indeed entails that the expectation can be localized in a small ball around  $X^*$ ), and then we will check that

b)  $X^*$  is a not degenerate minimizer i.e the Hessian of  $\Lambda^* - F_1$  is positive definite at  $X^*$  (As in [11] (see Appendix at the end of this chapter to get full details in our case), this will allow us to take this small ball of radius of order  $\sqrt{N}^{-1}$  and therefore to derive also the second order term as in the preceding section).

2.  $X^*$  is also a critical point of  $F_2$ . This second point allows to see that there is no fast oscillations which reduces the first order of the integral.

• **Proof of the first point :** To prove a), let us notice that by our choice of  $v(\theta)$  (see Proposition 2.1.13),  $\Lambda^*$  is minimum at the origin and that the differential of  $F_1$  at the origin is null. Hence, the origin is a critical point of  $F_1 - \Lambda^*$  (where this function is null) and we shall now prove that it is the unique one when  $|\theta|$  is small enough.

For that, we adopt the strategy used in [7] and consider the joint deviations of the law of  $(X^N, \hat{\mu}^N)$ . A slight generalization of Lemma 4.1 therein shows that it satisfies a large deviations principle on  $\mathbb{R}^4 \times \mathcal{P}(\mathbb{R})$  with good rate function

$$J(X, \mu) = I(\mu|\mu_E \otimes P) + \tau \left( X + X_0 - \int \zeta(\lambda)x^2 d\mu(\lambda, x) \right),$$

with  $I(\cdot|\cdot)$  the usual relative entropy,  $P$  a standard Gaussian measure and

$$\tau(X) = \sup_{\alpha \in \mathcal{D}_0} \{ \langle \alpha, X \rangle \},$$

where  $\mathcal{D}_0 = \{ \alpha \in \mathbb{R}^4 : 1 - 2\langle \alpha, \zeta(\lambda) \rangle \geq 0 \ \mu_E \text{ a.s. } \}$ . From that and the contraction principle we have that

$$\begin{aligned} I(X) &:= \Lambda^*(X) - F_1(X) \\ &= \inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})} \sup_{\alpha: 1-2\langle \alpha, \zeta(\lambda) \rangle \geq 0 \ \mu_E \text{ a.s.}} \left\{ I(\mu|\mu_E \otimes P) + \langle X + X_0 - \int \zeta(\lambda)x^2 d\mu(\lambda, x), \alpha \rangle - F_1(X) \right\}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

If we set

$$\mu^\alpha(dx, d\lambda) = \frac{1}{Z_\alpha} e^{-\frac{1}{2}(1-2\langle \zeta(\lambda), \alpha \rangle)x^2} dx d\mu_E(\lambda)$$

then

$$I(\mu|\mu^\alpha) = I(\mu|\mu_E \otimes P) - \langle \alpha, \int \zeta(\lambda)x^2 d\mu(\lambda, x) \rangle - \frac{1}{2} \int \log(1 - 2\langle \zeta(\lambda), \alpha \rangle) d\mu_E(\lambda).$$

Thus,

$$I(X) = \inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})} \sup_{\alpha} \left\{ I(\mu|\mu^\alpha) + \langle X + X_0, \alpha \rangle + \frac{1}{2} \int \log(1 - 2\langle \zeta(\lambda), \alpha \rangle) d\mu_E(\lambda) - F_1(X) \right\}.$$

Observe that the supremum in  $\Lambda^*(X)$  is achieved at some  $Y^X$  since  $Y \mapsto -\int \log(1 - 2\langle \zeta(\lambda), Y \rangle) d\mu_E(\lambda)$  is lower semicontinuous and  $\{Y \in \mathbb{R}^4 : 1 - 2\langle \zeta(\lambda), Y \rangle \geq 0 \ \mu_E \text{ a.s. } \}$  is compact when  $\mu_E$  is not a Dirac mass. Indeed, from the definition of  $v(\theta)$ , we find that  $\mu_E(\zeta_i(\lambda) > 0) > 0$  as well as  $\mu_E(\zeta_i(\lambda) < 0) > 0$  for  $1 \leq i \leq 4$  from which the compactness follows. Moreover  $Y^X$  satisfies

$$(X + X_0)_i = \int \frac{\zeta_i(\lambda)}{1 - 2\langle \zeta(\lambda), Y^X \rangle} d\mu_E(\lambda), \quad 1 \leq i \leq 4. \quad (2.42)$$

Consequently,

$$\Lambda^*(X) - F_1(X) = I(X) \geq \inf_{\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})} \left\{ I(\mu|\mu^{Y^X}) + \Lambda^*(X) - F_1(X) \right\}.$$

Since  $I(\mu|\mu^{Y^X}) \geq 0$ , we deduce that the infimum in  $\mu$  is taken at  $\mu = \mu^{Y^X}$ . We also check that  $\int \zeta(\lambda)x^2 d\mu^{Y^X}(\lambda, x) = X + X_0$  due to (2.42). Hence, going back to (2.41), we find that  $I(X) = \mathcal{I}(\mu^{Y^X})$  with

$$\mathcal{I}(\mu) = I(\mu|\mu_E \otimes P) - F_1 \left( \int \zeta(\lambda)x^2 d\mu(x, \lambda) - X_0 \right).$$

We next show that  $\mathcal{I}$  has a unique minimizer for  $\theta$  small enough, and this minimizer satisfies  $\int \zeta(\lambda)x^2 d\mu(x, \lambda) = X_0$ . If the infimum is actually reached at a point  $\mu^*$  such that  $F_1$  is regular enough at the vicinity of  $\int \zeta(\lambda)x^2 d\mu^*(x, \lambda) - X_0$  then this saddle point satisfy the equation

$$d\mu(x, \lambda) = \frac{1}{Z_\mu} e^{DF_1(\int \zeta(\lambda)x^2 d\mu(x, \lambda) - X_0)[\zeta(\lambda)x^2] - \frac{1}{2}x^2} dx d\mu_E(\lambda). \quad (2.43)$$

Before going on the proof, let us justify that it is indeed the case. Note first that as  $\theta$  goes to zero,  $v(\theta)$  goes to  $m = \int \lambda d\mu_E(\lambda)$  and  $\text{Re}[(1 + 2\theta v - 2\theta\lambda)^{-1}]$  is bounded below by say  $2^{-1}$ . Consequently,  $\text{Re}\gamma_N + 1 \geq 2^{-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i^2$ . The rate function for the deviations of the latest is  $x - \log x - 1$  which goes to infinity as  $x$  goes to zero as  $\log x^{-1}$ . Therefore, for  $\theta$  small enough,

$$\Lambda^*(X) \geq \log(2X_1)^{-1}$$

Since  $F_1(X)$  is locally bounded, we deduce that the infimum has to be taken on  $X_1 \geq \varepsilon$  for some fixed  $\varepsilon > 0$ . In particular,  $F_1$  is  $C^\infty$  on this set and equation (2.43) is well defined.

We now want to use this saddlepoint equation to show uniqueness. Suppose that there are two minimizers  $\mu$  and  $\nu$  satisfying (2.43). Then

$$\Delta := \left| \int \zeta(\lambda)x^2 d\mu(x, \lambda) - \int \zeta(\lambda)x^2 d\nu(x, \lambda) \right| \leq 4C|\theta| \sup_i |\zeta_i(\lambda)| x^2 (d\mu(x, \lambda) + d\nu(x, l)),$$

as we have that  $y \rightarrow DF_1(y)[x]$  is Lipschitz, with Lipschitz norm of order  $C|\theta|||x||$ . We have now to show that for  $\theta$  small enough, these covariances are uniformly bounded. This can be done using some arguments very similar to the ones we gave above to justify that the critical points are such that  $X_1 \geq \varepsilon$ . We let it to the reader. For  $\theta$  small enough, we obtain a contraction so that  $\Delta = 0$ , which entails also  $\mu = \nu$ . It is easy to check that  $\mu$  such that  $\int \zeta(\lambda)x^2 d\mu(x, \lambda) = X_0$  is always a solution to (2.43), and hence the unique one when  $\theta$  is small enough. Observe now that by (2.43), this minimizer is of the form  $\mu^* = \mu^{\alpha^*} = \mu^{Y^{X^*}}$ , so that  $X^* = \int \zeta(\lambda)x^2 d\mu^{\alpha^*}(x, \lambda) - X_0 = 0$  minimizes indeed  $I$  and is actually its unique minimizer.

This concludes the proof of point a), which was the hard part of the work.

As we announced at the beginning and following [6], we now have to show b), that is to say to check that this minimizer is non-degenerate. To see that, remark that the second order derivative of  $F_1$  at the origin is simply

$$D^2 F_1[0](U, V) = \text{Re}(\theta(U(vU - V))) \leq C|\theta|(|U|^2 + |V|^2) = C|\theta| \left( \sum_{i=1}^4 X_i^2 \right) \quad (2.44)$$

with  $U = X_1 + iX_2, V = X_3 + iX_4$ .

On the other side, observe that, as  $d(\hat{\mu}_{E_N}^N, \mu_E) = o(\sqrt{N}^{-1})$ , the covariance matrix of

$\sqrt{N}(u_1^N, (\text{Im}(\theta))^{-1}u_2^N, v_1^N, (\text{Im}(\theta))^{-1}v_2^N)$  converges as  $N$  goes to infinity towards a  $4 \times 4$  matrix  $K(\theta)$  which is positive definite. Now, remark that  $v(\theta) = R_{\mu_E}(2\theta)$  implies that  $\text{Re}(\theta)(\text{Im}(\theta))^{-1}\text{Im}(v(\theta))$  converges as  $|\theta|$  goes to zero, from which we argue that  $K(0)$  is positive definite and bounded. By continuity in  $\theta$  of  $K(\theta)$  we deduce that  $K(\theta) \leq CI$  for some  $C > 0$  and  $\theta$  small enough. and the limiting covariances  $\sqrt{N}(u_1^N, u_2^N, v_1^N, v_2^N)$  (which are also given by the second order derivatives of  $\Lambda^*$ ) converges towards a matrix  $K'(\theta)$  such that

$$D^2\Lambda^*[0](X, X) = \langle X, K'(\theta)^{-1}X \rangle \geq C^{-1}(X_1^2 + X_3^2 + (\text{Im}(\theta))^{-2}X_2^2 + (\text{Im}(\theta))^{-2}X_4^2)$$

and hence, this together with (2.44) gives that, for  $|\theta|$  small enough,  $\frac{1}{2}D^2\Lambda^*[0] - D^2F_1[0] \geq 0$ .

• **Proof of the second point :** To get Theorem 2.1.4, the last step is now to establish the second point, namely to check that 0 is also a critical point for  $F_2$ , which is straightforward computation since  $F$  behaves in the neighborhood of the origin as a sum of monomials of degree 2 in  $X$ .

■

## 2.5 Full asymptotics in the real rank one case

The goal of this section is to establish the convergence and to find an explicit expression for  $I_{\mu_E}(\theta) := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log I_N(\theta, E_N)$  as far as  $E_N$  satisfies Hypothesis 2.1.1 but  $\theta$  do not necessarily satisfy the hypotheses of Theorem 2.1.2. This corresponds to show Theorem 2.1.6 (we again restrict to the case  $\beta = 1$  to avoid heavy notations).

We recall that

$$I_N(\theta, E_N) = \mathbb{E} \left[ \exp \left( N\theta \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i g_i^2}{\sum_{i=1}^N g_i^2} \right) \right],$$

therefore one main step of the proof will be to get a large deviation principle for  $z_N := \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i g_i^2}{\sum_{i=1}^N g_i^2}$ .

### 2.5.1 Large deviation bounds for $z_N$

We denote by  $u_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g_i^2$  and  $v_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i g_i^2$ . We intend to get the following result

**Proposition 2.5.1** *If the empirical measure  $\hat{\mu}_{E_N}^N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\lambda_i}$  satisfies Hypothesis 2.1.1, the law  $\hat{\pi}_N$  of  $(u_N^{-1}v_N)$  under the standard  $N$ -dimensional Gaussian measure satisfies a large deviation principle in the scale  $N$  with good rate function*

$$T(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2}h_\alpha(K_{\mu_E}(Q_{\mu_E}(\alpha))) & \text{if } \alpha \in ]\alpha_{\min}, \alpha_{\max}[ , \\ \frac{1}{2}h_\alpha^{\max} & \text{if } \alpha \in ]\alpha_{\max}, \lambda_{\max}[ , \\ \frac{1}{2}h_\alpha^{\min} & \text{if } \alpha \in ]\lambda_{\min}, \alpha_{\min}[ , \\ +\infty & \text{if } \alpha \notin ]\lambda_{\min}, \lambda_{\max}[ \end{cases}$$

with

$$\alpha_{\max} = \lambda_{\max} - \frac{1}{H_{\max}} \quad \text{and} \quad \alpha_{\min} = \lambda_{\min} - \frac{1}{H_{\min}},$$

where we recall that  $H_{\max} = \lim_{z \downarrow \lambda_{\max}} \int \frac{1}{z-\lambda} d\mu_E(\lambda)$  and  $H_{\min} = \lim_{z \uparrow \lambda_{\min}} \int \frac{1}{z-\lambda} d\mu_E(\lambda)$ ; we denote also, for  $\kappa \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^c$ ,

$$h_\alpha(\kappa) = \int \log \left( \frac{\kappa - \lambda}{\kappa - \alpha} \right) d\mu_E(\lambda),$$

$h_\alpha^{\min} = \lim_{\kappa \uparrow \lambda_{\min}} h_\alpha(\kappa)$  and  $h_\alpha^{\max} = \lim_{\kappa \downarrow \lambda_{\max}} h_\alpha(\kappa)$ . Finally, the functions  $K_{\mu_E}$  and  $Q_{\mu_E}$  were defined respectively in Definition 2.1.10 and Property 2.1.11.

Note that  $H_{\max}$  and  $H_{\min}$  can be infinite (respectively  $+\infty$  and  $-\infty$ ); in this case, we adopt the convention that  $\frac{1}{\infty} = 0$ .

The **proof of Proposition 2.5.1** decomposes mainly in four steps, expressed in the following four lemmata :

**Lemma 2.5.2** For any  $\alpha \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ ,

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \hat{\pi}_N (|v_N - \alpha u_N| < \sqrt{\varepsilon}) \\ & \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \underline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \hat{\pi}_N \left( \left| \frac{v_N}{u_N} - \alpha \right| < \varepsilon \right) \\ & \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \hat{\pi}_N \left( \left| \frac{v_N}{u_N} - \alpha \right| < \varepsilon \right) \\ & \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \hat{\pi}_N (|v_N - \alpha u_N| < \sqrt{\varepsilon}) \end{aligned}$$

**Lemma 2.5.3** We denote by  $v_N(\gamma) := N^{-1} \sum_{i=1}^N \gamma_i g_i^2$  and we assume that the  $\gamma_i$ 's are such that

1.  $\gamma_{\max}^N := \max_{1 \leq i \leq N} \gamma_i$  (resp.  $\gamma_{\min}^N = \min_{1 \leq i \leq N} \gamma_i$ ) converges towards  $\gamma_{\max} < \infty$  (resp.  $\gamma_{\min} > -\infty$ ).
2. The empirical measure  $N^{-1} \sum_{i=1}^N \delta_{\gamma_i}$  converges to a compactly supported measure  $\mu$ ; we denote by  $\gamma^+$  and  $\gamma^-$  the edges of the support of  $\mu$ .

Then, the law of  $v_N(\gamma)$  satisfies a large deviation principle in the scale  $N$  with rate function

$$J_{\mu, \gamma_{\min}, \gamma_{\max}}(x) = \begin{cases} L(x) & \text{if } x \in [x_1, x_2] \\ L(x_1) + \frac{1}{2\gamma_{\min}}(x - x_1) & \text{if } x < x_1 \\ L(x_2) + \frac{1}{2\gamma_{\max}}(x - x_2) & \text{if } x > x_2 \end{cases}$$

with

$$L(x) = \sup \left\{ ux + \frac{1}{2} \int \log(1 - 2\lambda u) d\mu(\lambda) \right\}$$

where the supremum is taken over  $u$  such that  $1 - 2\lambda u > 0$  for every  $\lambda \in [\gamma_{\min}, \gamma_{\max}]$ ,

$$x_1 = \begin{cases} \gamma_{\min}(\gamma_{\min} H_{\min}^{\gamma_{\min}} - 1), & \text{if } \gamma_{\min} < 0 \\ -\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

whereas

$$x_2 = \begin{cases} \gamma_{\max}(\gamma_{\max} H_{\max}^{\gamma_{\max}} - 1), & \text{if } \gamma_{\max} > 0 \\ \infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

with the obvious notations  $H_{\max}^{\gamma} = \lim_{z \downarrow \gamma_{\max}} H_{\mu}(z)$  and  $H_{\min}^{\gamma} = \lim_{z \uparrow \gamma_{\min}} H_{\mu}(z)$ .

**Lemma 2.5.4** *If we denote  $\gamma_i^\alpha := \lambda_i - \alpha$ ,  $\mu^\alpha$  the weak limit of the empirical measure  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\gamma_i^\alpha}$  (note that  $\mu^\alpha$  is just  $\tau_{-\alpha} \# \mu$ , where  $\tau_{-\alpha}$  is the shift given by  $\tau_{-\alpha}(x) = x - \alpha$ ),  $\gamma_{\max}^\alpha$  and  $\gamma_{\min}^\alpha$  are respectively the limits of  $\max \gamma_i^\alpha$  and  $\min \gamma_i^\alpha$ , then*

$$J_{\mu^\alpha, \gamma_{\max}^\alpha, \gamma_{\min}^\alpha}(0) = T(\alpha),$$

with  $T$  as defined in Proposition 2.5.1.

**Lemma 2.5.5**  *$T$  is a good rate function.*

Then, Proposition 2.5.1 follows easily from these lemmata. Indeed, from Theorem 4.1.11 in [21], it is enough to consider small balls ie to show that, for any  $\alpha$ ,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \hat{\pi}_N (|z_N - \alpha| < \varepsilon) \geq -T(\alpha),$$

and

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \hat{\pi}_N (|z_N - \alpha| < \varepsilon) \leq -T(\alpha).$$

By definition of  $u_N$  and  $v_N$ , we have that,  $z_N \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$  a.s. so that, for  $\alpha \notin [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ ,

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \hat{\pi}_N (|z_N - \alpha| < \varepsilon) = -\infty.$$

Therefore, we can restrict in the sequel to  $\alpha \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ .

Now, if  $\gamma_i^\alpha = \lambda_i - \alpha$  and the  $\lambda_i$ 's satisfy Hypothesis 2.1.1,  $v_N(\gamma^\alpha) := \frac{1}{N} \sum (\lambda_i - \alpha) g_i^2 = v_N - \alpha u_N$  satisfy the hypotheses (1) and (2) of Lemma 2.5.3. Therefore it satisfies a large deviation principle with rate function  $J_{\mu^\alpha, \gamma_{\max}^\alpha, \gamma_{\min}^\alpha}$ . In particular this gives that in Lemma 2.5.2, the rightmost and leftmost members coincide, so that

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \hat{\pi}_N (|v_N - \alpha u_N| < \sqrt{\varepsilon}) \\ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \hat{\pi}_N (|v_N - \alpha u_N| < \sqrt{\varepsilon}) = -J_{\mu^\alpha, \gamma_{\min}^\alpha, \gamma_{\max}^\alpha}(0) = -T(\alpha) \end{aligned}$$

where the last equality comes from Lemma 2.5.4.

The study of the function  $T$ , that will give Lemma 2.5.5, allows to conclude the proof.

## 2.5.2 Proofs of the lemmata

### Proof of Lemma 2.5.2 :

For any  $\alpha \in \mathbb{R}$  and  $\varepsilon > 0$ , we have

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_N (|v_N - \alpha u_N| < \sqrt{\varepsilon}) - \hat{\pi}_N (|u_N| \geq \sqrt{\varepsilon}^{-1}) &\leq \hat{\pi}_N \left( \left| \frac{v_N}{u_N} - \alpha \right| < \varepsilon \right) \\ &\leq \hat{\pi}_N (|v_N - \alpha u_N| < \sqrt{\varepsilon}) + \hat{\pi}_N (|u_N| \geq \sqrt{\varepsilon}^{-1}). \end{aligned}$$

Now, by Chebychev's inequality,

$$\hat{\pi}_N (|u_N| \geq \sqrt{\varepsilon}^{-1}) \leq e^{-\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}N} \hat{\pi}_N (e^{\frac{1}{4}u_N}) \leq 2^N e^{-\frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}N},$$

so that

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \hat{\pi}_N \left( |u_N| \geq \sqrt{\varepsilon}^{-1} \right) = -\infty,$$

what gives immediately Lemma 2.5.2.

**Proof of Lemma 2.5.3 :**

The problem here is mainly due to escaping eigenvalues : if  $\gamma^+$  and  $\gamma^-$  do not coincide respectively to  $\gamma_{\max}$  and  $\gamma_{\min}$ , the rate function might have non exposed points, so that it is impossible to apply directly a Gärtner-Ellis type theorem. The result corresponding to Lemma 2.5.3 is contained in [9]. We recall hereafter the main steps of their proof. For sake of simplicity, we restrict to the cases where  $\gamma^+$  (and therefore also  $\gamma_{\max}$ ) is non negative whereas  $\gamma^-$  (and therefore also  $\gamma_{\min}$ ) is non positive.

The proof relies on the following decomposition, for any  $\varepsilon_N > 0$ ,

$$\begin{aligned} v_N(\gamma) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{\gamma_i > \gamma_+ + \varepsilon_N} \gamma_i g_i^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{\gamma_i < \gamma_- - \varepsilon_N} \gamma_i g_i^2 + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{\gamma_- - \varepsilon_N < \gamma_i < \gamma_+ + \varepsilon_N} \gamma_i g_i^2 \\ &:= v_N^+(\gamma) + v_N^-(\gamma) + \tilde{v}_N(\gamma). \end{aligned}$$

As, by hypothesis,  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\gamma_i} \rightarrow \mu$ , we know that, if  $\varepsilon_N \rightarrow 0$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{\gamma_i > \gamma_+ + \varepsilon_N} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 1_{\gamma_i < \gamma_- - \varepsilon_N} = 0,$$

so that by Lemma 6 in [9], the law of  $v_N^+(\gamma)$  under the standard Gaussian measure satisfies a large deviation principle with rate function

$$G^+(x) = \begin{cases} \frac{x}{2\gamma_{\max}} & \text{if } x\gamma_{\max} \geq 0 \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and same thing for  $v_N^-(\gamma)$  (with  $\gamma_{\min}$  instead of  $\gamma_{\max}$  in the definition of  $G^-$ ).

For  $\tilde{v}_N(\gamma)$ , one finds (see [9] or [7]) that its law satisfy a large deviation principle with rate function

$$G(x) = \sup_{u: 1-2u\lambda > 0, \mu \text{ a.s.}} \left\{ ux + \frac{1}{2} \int \log(1 - 2u\lambda) d\mu(\lambda) \right\}$$

By independence of  $v_N^+(\gamma), v_N^-(\gamma)$  and  $\tilde{v}_N(\gamma)$  and the contraction principle, one gets that  $v_N(\gamma)$  satisfies a large deviation principle with rate function

$$\mathcal{R}(x) = \inf_{y_1 + y_2 + y_3 = x} \{G^+(y_1) + G^-(y_2) + G(y_3)\}.$$

Let us now check that the function  $\mathcal{R}$  coincide with  $J_{\mu, \gamma_{\min}, \gamma_{\max}}$  as defined in Lemma 2.5.3. To achieve this goal, we use Theorem 16.4 in [66], which gives us that  $\mathcal{R}^* = (G^+)^* + (G^-)^* + G^*$ . It is easy to compute  $(G^+)^*$  and  $(G^-)^*$ . For example,

$$(G^+)^* = \begin{cases} 0 & \text{if } x < \frac{1}{2\gamma_{\max}} \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

and if we denote by  $\Lambda$  the function given by

$$\Lambda(u) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \int \log(1 - 2\lambda u) d\mu(\lambda) & \text{if } u \text{ is such that } 1 - 2\lambda u > 0 \text{ } \mu \text{ a.s.} \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

we have that  $G = \Lambda^*$ , so that  $G^* = \Lambda$  and

$$\mathcal{R}^*(u) = \begin{cases} \Lambda(u) & \text{if } \frac{1}{2\gamma_{\min}} < u < \frac{1}{2\gamma_{\max}} \\ +\infty & \text{otherwise,} \end{cases}$$

and the computation of the Legendre transform of the above function gives  $J_{\mu, \gamma_{\min}, \gamma_{\max}}$ .

In particular, we see that  $\Lambda'$  is non-decreasing so that we can define  $(\Lambda')^{-1}$ , which is also non-decreasing; its domain is  $\left[\Lambda'\left(\frac{1}{2\gamma_{\min}}\right), \Lambda'\left(\frac{1}{2\gamma_{\max}}\right)\right]$  and we can check that it coincide with  $[x_1, x_2]$ , as defined in Lemma 2.5.3.

The other cases (depending on the signs of  $\gamma_{\min}$  and  $\gamma_{\max}$ ) are handled similarly.

**Proof of Lemma 2.5.4 :**

Our goal is to identify  $T(\alpha) = J_{\mu^\alpha, \gamma_{\min}^\alpha, \gamma_{\max}^\alpha}(0)$ . As we said above, it is enough to restrict to  $\alpha \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ .

We have of course  $\gamma_{\min}^\alpha = \lambda_{\min} - \alpha$  and  $\gamma_{\max}^\alpha = \lambda_{\max} - \alpha$  and it is easy to check that

$$H_{\max}^\alpha := \lim_{z \downarrow \lambda_{\max} - \alpha} \int \frac{1}{z - \lambda} d\mu^\alpha(\lambda) = H_{\max}$$

(and respectively for  $H_{\min}$ ).

Therefore, if we denote by  $x_1^\alpha$  and  $x_2^\alpha$  the bounds corresponding to  $\mu^\alpha$ , we have that :

$$x_1^\alpha = (\lambda_{\min} - \alpha)((\lambda_{\min} - \alpha)H_{\min} - 1)$$

(as the inequality  $\gamma_{\min}^\alpha = \lambda_{\min} - \alpha < 0$  is always satisfied for the  $\alpha$ 's we are interested in) and similarly

$$x_2^\alpha = (\lambda_{\max} - \alpha)((\lambda_{\max} - \alpha)H_{\max} - 1).$$

We now have to determine the sign of  $x_1^\alpha$  and  $x_2^\alpha$  with respect to  $\alpha$ . It is easy to check that

- $x_1^\alpha \leq 0$  and  $x_2^\alpha \geq 0$  if  $\alpha \in \left[\alpha_{\min} := \lambda_{\min} - \frac{1}{H_{\min}}, \alpha_{\max} := \lambda_{\max} - \frac{1}{H_{\max}}\right]$
- $x_1^\alpha \leq 0$  and  $x_2^\alpha \leq 0$  if  $\alpha \in [\alpha_{\max}, \lambda_{\max}]$
- $x_1^\alpha \geq 0$  and  $x_2^\alpha \geq 0$  if  $\alpha \in [\alpha_{\min}, \lambda_{\min}]$

Therefore, we deduce

$$J_{\mu^\alpha, \gamma_{\min}^\alpha, \gamma_{\max}^\alpha}(0) = \begin{cases} L^\alpha(0) & \text{if } \alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}] \\ L^\alpha(x_2^\alpha) - \frac{1}{2}H_{\max}(\alpha_{\max} - \alpha) & \text{if } \alpha_{\max} \leq \alpha \leq \lambda_{\max} \\ L^\alpha(x_1^\alpha) - \frac{1}{2}H_{\min}(\alpha_{\min} - \alpha) & \text{if } \lambda_{\min} \leq \alpha \leq \alpha_{\min}, \end{cases}$$

where we recall that

$$L^\alpha(x) = \sup \left\{ ux + \frac{1}{2} \int \log(1 + 2\alpha u - 2\lambda u) d\mu(\lambda) \right\},$$

with the supremum on  $u$  such that  $1 + 2\alpha u - 2\lambda u > 0$  for all  $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ .



We now get interested in the expression of  $L^\alpha$  on  $[x_1^\alpha, x_2^\alpha]$ .

Obviously, the supremum is not reached at  $u = 0$ .

For  $u \neq 0$ , we denote  $\kappa := \alpha + \frac{1}{2u}$ , then we have that  $1 + 2\alpha u - 2\lambda u = \frac{\kappa - \lambda}{\kappa - \alpha}$ . Moreover, if for all  $\lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ ,  $1 + 2\alpha u - 2\lambda u > 0$  then ( $\kappa > \lambda_{\max}$  and  $u > 0$ ) or ( $\kappa < \lambda_{\min}$  and  $u < 0$ ) and conversely, so that

$$L^\alpha(x) = \frac{1}{2} \sup_{\kappa \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^c} \left\{ \frac{x}{\kappa - \alpha} + h_\alpha(\kappa) \right\},$$

with the notations of Proposition 2.5.1.

- If  $\alpha \in I'' := [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ ,

$$J_{\mu_\alpha, \gamma_{\min}^\alpha, \gamma_{\max}^\alpha}(0) = L^\alpha(0) = \frac{1}{2} \sup_{\kappa \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^c} h_\alpha(\kappa).$$

We now want to check that in this case, the supremum of  $h_\alpha$  is reached at  $\kappa_0 = K_{\mu_E}(Q_{\mu_E}(\alpha))$ .

The first point is to show that in this case, there is a unique  $\kappa_0$  where  $h'_\alpha$  cancels. Indeed :

$$h'_\alpha(\kappa_0) = 0 \iff H_{\mu_E}(\kappa_0) = \frac{1}{\kappa_0 - \alpha}.$$

This implies that  $\frac{1}{\kappa_0 - \alpha} \in I' := ]H_{\min}, H_{\max}[ \setminus \{0\}$  so that, by definition of  $K_{\mu_E}$ ,

$$\kappa_0 = K_{\mu_E} \left( \frac{1}{\kappa_0 - \alpha} \right), \tag{2.45}$$

which gives that  $R_{\mu_E} \left( \frac{1}{\kappa_0 - \alpha} \right) = \alpha$ .

We know (by point 4. of Property 2.1.11) that  $R_{\mu_E}$  is bijective on  $I'$ , so that, if  $\alpha \in I''$ , there exists a unique  $z \in I'$  such that  $\alpha = R_{\mu_E}(z)$ .

But the function  $x \mapsto \frac{1}{x - \alpha}$  is also bijective from  $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$  to  $\mathbb{R}^*$  so, as  $I'$  does not contain 0, there exists a unique  $\kappa_0 \neq \alpha$  such that  $z = \frac{1}{\kappa_0 - \alpha}$  and by (2.45),  $\kappa_0$  is in  $I$  and can be expressed as  $\kappa_0 = K_{\mu_E}(Q_{\mu_E}(\alpha))$ .

We now want to check that the maximum of  $h_\alpha$  is actually reached at  $\kappa_0$ . We claim the following fact :

**Lemma 2.5.6**

$h^\alpha$  has one of the following behaviour on  $I$  :

- if  $\kappa_0 > \lambda_{\max}$ ,  $h_\alpha$  is decreasing from 0 to  $h_{\min}^\alpha$  on  $] - \infty, \lambda_{\min}[$ , it is increasing from  $h_{\max}^\alpha$  to  $h_\alpha(\kappa_0)$  on  $]\lambda_{\max}, \kappa_0]$  and then decreasing from  $h_\alpha(\kappa_0)$  to 0 on  $]\kappa_0, +\infty[$ ,
- if  $\kappa_0 < -\lambda_{\max}$ ,  $h_\alpha$  is increasing from 0 to  $h_\alpha(\kappa_0)$  on  $] - \infty, \kappa_0]$  then decreasing from  $h_\alpha(\kappa_0)$  to  $h_{\min}^\alpha$  on  $]\kappa_0, \lambda_{\min}[$ , it is increasing from  $h_{\max}^\alpha$  to 0 on  $]\lambda_{\max}, +\infty[$ .

**Proof of lemma 2.5.6 :**

We treat in details the case  $\kappa_0 > \lambda_{\max}$ , the other one being very similar. We recall from Property 2.1.11 that  $I''$  is the image of  $R_{\mu_E}$ .

If  $\kappa_0 > \lambda_{\max}$ ,  $h'_\alpha$  does not cancel on  $] -\infty, \lambda_{\min}[$ . We have to determine its sign. As  $\alpha \in I''$ ,

$$\begin{aligned} \alpha > \lambda_{\min} - \frac{1}{H_{\min}} &\implies H_{\min} - \frac{1}{\lambda_{\min} - \alpha} < 0 \\ &\implies \lim_{\kappa \rightarrow \lambda_{\min}} h'_\alpha(\kappa) < 0, \end{aligned}$$

so that  $h'_\alpha$  is negative on the whole interval  $] -\infty, \lambda_{\min}[$ . Furthermore, it is not hard to see that  $\lim_{\kappa \rightarrow -\infty} h_\alpha(\kappa) = 0$  so that  $h_\alpha$  is decreasing from 0 to  $h_{\min}^\alpha$ .

On the other side, we want to find the sign of  $h'_\alpha$  on  $] \lambda_{\max}, +\infty[$  knowing that it cancels at  $\kappa_0$ . As above, we show that  $\lim_{\kappa \rightarrow \lambda_{\max}} h'_\alpha(\kappa) > 0$  and we deduce from that and the continuity of  $h'_\alpha$ , that it is positive till  $\kappa_0$ . Furthermore,  $h_\alpha$  is also twice differentiable at  $\kappa_0$  and

$$\begin{aligned} h''_\alpha(\kappa_0) &= - \int \frac{1}{(\kappa_0 - \lambda)^2} d\mu_E(\lambda) + \left( \frac{1}{\kappa_0 - \alpha} \right)^2 \\ &< - \left( \int \frac{1}{\kappa_0 - \lambda} d\mu_E(\lambda) \right)^2 + (H_{\mu_E}(\kappa_0))^2 < 0, \end{aligned}$$

where we used Cauchy-Schwarz inequality and the definition of  $\kappa_0$ . Therefore  $h'_\alpha$  is negative for  $\kappa > \kappa_0$  and the fact that  $\lim_{\kappa \rightarrow +\infty} h_\alpha(\kappa) = 0$  concludes the proof of Lemma 2.5.6.

Finally, we got that if  $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$ ,

$$J_{\mu^\alpha, \gamma_{\min}^\alpha, \gamma_{\max}^\alpha}(0) = \frac{1}{2} h_\alpha(K_{\mu_E}(Q_{\mu_E}(\alpha)))$$

- If  $\alpha > \alpha_{\max}$ , our starting point is

$$J_{\mu^\alpha, \gamma_{\min}^\alpha, \gamma_{\max}^\alpha}(0) = \frac{1}{2} \sup_{\kappa \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^c} \left\{ x_2^\alpha \left( \frac{1}{\kappa - \alpha} - \frac{1}{\lambda_{\max} - \alpha} \right) + h_\alpha(\kappa) \right\}$$

We have to study

$$g_\alpha(\kappa) = \frac{x_2^\alpha}{\kappa - \alpha} + h_\alpha(\kappa)$$

on  $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^c$ .

We compute

$$g'_\alpha(\kappa) = \frac{1}{(\kappa - \alpha)^2} [(\kappa - \alpha)(H_{\mu_E}(\kappa)(\kappa - \alpha) - 1) - x_2^\alpha].$$

We want to check that  $g'_\alpha$  is always negative and as it is easy to check that  $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} g_\alpha(\kappa) = \lim_{\kappa \rightarrow -\infty} g_\alpha(\kappa) = 0$ , this will give that  $g_\alpha$  goes to its supremum as  $\kappa$  goes to  $\lambda_{\max}$ , so that  $J_{\mu^\alpha, \gamma_{\min}^\alpha, \gamma_{\max}^\alpha}(0) = \frac{1}{2} h_{\max}^\alpha$ . Therefore, the only point to check is that  $g'_\alpha$  is indeed negative. We study the function

$$f_\alpha(\kappa) = (\kappa - \alpha)(H_{\mu_E}(\kappa)(\kappa - \alpha) - 1),$$

so that

$$f'_\alpha(\kappa) = 2(\kappa - \alpha)H_{\mu_E}(\kappa) - (\kappa - \alpha)^2 \int \frac{1}{(\kappa - \lambda)^2} d\mu_E(\lambda) - 1.$$

By convexity of  $x \mapsto x^2$ , for any  $\kappa$ , we have that

$$H_{\mu_E}(\kappa)^2 \leq \int \frac{1}{(\kappa - \lambda)^2} d\mu_E(\lambda)$$

so that

$$f'_\alpha(\kappa) \leq -[(\kappa - \alpha)H_{\mu_E}(\kappa) - 1]^2 < 0$$

We deduce that  $f_\alpha(\kappa)$  is decreasing. Its limit is also 0 at  $\pm\infty$ , so that it reaches its supremum, which is  $x_2^\alpha$  as  $\kappa$  goes to  $\lambda_{\max}$ , from what we can conclude that  $g'_\alpha < 0$ .

- The case  $\alpha < \alpha_{\min}$  is treated similarly.

This concludes the proof of Lemma 2.5.4.

The **proof of Lemma 2.5.5** is easy :  $T$  is in fact continuous on  $]\lambda_{\min}, \lambda_{\max}[$ . Indeed, it is continuous on each interval  $]\lambda_{\min}, \alpha_{\min}[$ ,  $]\alpha_{\min}, \alpha_{\max}[$  and  $]\lambda_{\max}, \alpha_{\max}[$  so that it is enough to check that  $K_{\mu_E}(Q_{\mu_E}(\alpha)) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \alpha_{\max}} \lambda_{\max}$  (see Property 2.1.11) so that  $T(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow \alpha_{\max}} \frac{1}{2}h_{\max}^\alpha$ ; and similarly at  $\alpha_{\min}$ .

### 2.5.3 Existence and expression of the limit

We want to show the following lemma

**Lemma 2.5.7** *For any  $\theta \in \mathbb{R}$ , if  $T$  is the function introduced in Proposition 2.5.1, we have*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log I_N(\theta, E_N) = \sup_\alpha \{\theta\alpha - T(\alpha)\}.$$

The **proof of Lemma 2.5.7** is a direct application of Varadhan's lemma, as  $I_N(\theta, E_N) = \mathbb{E}(e^{N\theta z_N})$ ,  $z_N$  satisfies a large deviations principle with good rate function  $T$  and we can restrict to  $z_N$  between  $\lambda_{\min}$  and  $\lambda_{\max}$ .

Lemma 2.5.7 therefore gives the existence of the limit, the last step to conclude the proof of Theorem 2.1.6 is to check that it coincides with the function  $I_{\mu_E}$  introduced in Theorem 2.1.6.

We denote by

$$G(\theta) := \sup_{\alpha \in I''} \left[ \theta\alpha - \frac{1}{2}h_\alpha(K_{\mu_E}(Q_{\mu_E}(\alpha))) \right],$$

$$G_1(\theta) := \sup_{\alpha \in I_1} \left[ \theta\alpha - \frac{1}{2}h_{\max}^\alpha \right], \quad G_2(\theta) := \sup_{\alpha \in I_2} \left[ \theta\alpha - \frac{1}{2}h_{\min}^\alpha \right],$$

where we recall that  $I'' = [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$  and we denote by  $I_1 = ]\alpha_{\max}, \lambda_{\max}]$  and  $I_2 = [\lambda_{\min}, \alpha_{\min}[$ .

The main part of the work for this last step will rely on proving

**Lemma 2.5.8** *With the notations introduced above, we have<sup>a</sup>*

$$G(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_0^{2\theta} R_{\mu_E}(u) du, & \text{if } 2\theta \in I' \cup \{0\} = ]H_{\min}, H_{\max}[ \\ \theta \alpha_{\min} - \frac{1}{2} \int \log(H_{\min}(\lambda_{\min} - \lambda)) d\mu_E(\lambda)^\sharp, & \text{if } 2\theta \leq H_{\min} \\ \theta \alpha_{\max} - \frac{1}{2} \int \log(H_{\max}(\lambda_{\max} - \lambda)) d\mu_E(\lambda)^*, & \text{if } 2\theta \geq H_{\max}, \end{cases}$$

$$G_1(\theta) = \begin{cases} \theta \left( \lambda_{\max} - \frac{1}{2\theta} \right) - \frac{1}{2} \int \log(2\theta(\lambda_{\max} - \lambda)) d\mu_E(\lambda)^*, & \text{if } 2\theta > H_{\max} \\ \theta \alpha_{\max} - \frac{1}{2} \int \log(H_{\max}(\lambda_{\max} - \lambda)) d\mu_E(\lambda)^*, & \text{if } 2\theta < H_{\max}, \end{cases}$$

$$G_2(\theta) = \begin{cases} \theta \left( \lambda_{\min} - \frac{1}{2\theta} \right) - \frac{1}{2} \int \log(2\theta(\lambda_{\min} - \lambda)) d\mu_E(\lambda)^\sharp, & \text{if } 2\theta < H_{\min} \\ \theta \left( \lambda_{\min} - \frac{1}{H_{\min}} \right) - \frac{1}{2} \int \log(H_{\min}(\lambda_{\min} - \lambda)) d\mu_E(\lambda)^\sharp, & \text{if } 2\theta > H_{\min}. \end{cases}$$

**Proof of Lemma 2.5.8 :**

• We first study  $G$ .

This is finding the supremum of  $j_\theta(\alpha) := \theta\alpha - \frac{1}{2}h_\alpha(K_{\mu_E}(Q_{\mu_E}(\alpha)))$  on  $I'$ . From Definition 2.1.10 and Property 2.1.11, we have that  $j_\theta$  is differentiable on  $I'$  and an easy computation gives

$$j'_\theta(\alpha) = \frac{1}{2}(2\theta - Q_{\mu_E}(\alpha)).$$

– If  $2\theta \in I'$ , the unique  $\alpha_0$  such that  $j'_\theta(\alpha_0) = 0$  is given by  $\alpha_0 = R_{\mu_E}(2\theta)$ .

From point 2 of Property 2.1.11, we know that  $R_{\mu_E}$  is increasing on  $I'$  and so is its inverse  $Q_{\mu_E}$  on  $I''$ .

Therefore  $j'_\theta$  is decreasing and  $j_\theta$  is increasing from  $\lim_{\alpha \rightarrow \lambda_{\min}} j_\theta(\alpha)$  to  $j_\theta(\alpha_0)$  and then decreasing so that its maximum is reached at  $\alpha_0$ .

This gives that if  $2\theta \in ]H_{\min}, H_{\max}[ \setminus \{0\}$ ,

$$G(\theta) = \frac{1}{2} \left( 2\theta R_{\mu_E}(2\theta) - \log(2\theta) - \int \log(K_{\mu_E}(2\theta) - \lambda) d\mu_E(\lambda) \right).$$

As  $K_{\mu_E}(2\theta) \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^c$ ,  $G$  is analytic on  $I'$  and the calculation of its derivative gives  $G'(\theta) = R_{\mu_E}(2\theta)$ .

As  $\lim_{\theta \rightarrow 0} G(\theta) = 0$ , we have

$$G(\theta) = \int_0^\theta R_{\mu_E}(2u) du = \frac{1}{2} \int_0^{2\theta} R_{\mu_E}(u) du.$$

– If  $H_{\min} > -\infty$  and  $2\theta < H_{\min}$ , the equation  $j'_\theta(\alpha_0) = 0$  has no solution, we want to determine the sign of  $j'_\theta$  on  $I'$ .

For all  $\alpha \in I''$ ,  $Q_{\mu_E}(\alpha) \in I'$  so that  $Q_{\mu_E}(\alpha) > H_{\min}$  and therefore  $j'_\theta(\alpha) < 0$ .

$j_\theta$  is decreasing on  $I''$  and  $\lim_{\alpha \uparrow m^-} j_\theta(\alpha) = \lim_{\alpha \downarrow m^+} j_\theta(\alpha)$  (where  $m$  is the mean of  $\mu_E$ ) so that the supremum is reached at the left boundary  $\alpha_{\min}$  of  $I''$  and is equal to

$$\theta \alpha_{\min} - \frac{1}{2} \int \log(H_{\min}(\lambda_{\min} - \lambda)) d\mu_E(\lambda).$$

---

<sup>a</sup>  $\sharp = -\infty$  if  $H_{\min} = -\infty$  and otherwise these expressions are well defined in virtue of the fact that  $\int_0^1 \frac{1}{\lambda} d\mu(\lambda) <$

$+\infty \Rightarrow - \int_0^1 \log \lambda d\mu(\lambda) < +\infty$ ,

\*  $= -\infty$  if  $H_{\max} = +\infty$  and otherwise these expressions are well defined for the same reason.

- If  $H_{\max} < +\infty$ , a similar treatment in the case  $2\theta > H_{\max}$  concludes the proof for  $G$ .
- We now consider  $G_1$ . We recall that, if  $H_{\max} < +\infty$ ,

$$G_1(\theta) = \sup_{\alpha \in I_1} \left\{ \theta\alpha - \frac{1}{2} \int \log \left( \frac{\lambda_{\max} - \lambda}{\lambda_{\max} - \alpha} \right) d\mu_E(\lambda) \right\}.$$

We denote by  $l(\alpha) := \theta\alpha - \frac{1}{2} \int \log \left( \frac{\lambda_{\max} - \lambda}{\lambda_{\max} - \alpha} \right) d\mu_E(\lambda)$  is analytic and derivable and  $l'(\alpha) = \theta - \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_{\max} - \alpha}$ .

- If  $2\theta > H_{\max}$  then there exists a unique  $\alpha_1 = \lambda_{\max} - \frac{1}{2\theta}$ , such that  $l'(\alpha_1) = 0$  and it is easy to see that the maximum of  $l$  is reached at  $\alpha_1$  then

$$G_1(\theta) = \theta \left( \lambda_{\max} - \frac{1}{2\theta} \right) - \frac{1}{2} \int \log(2\theta(\lambda_{\max} - \lambda)) d\mu_E(\lambda).$$

- If  $2\theta < H_{\max}$ ,  $l'$  is negative on  $I_1$  and therefore it goes to its supremum at the left boundary  $\alpha_{\max}$  of  $I_1$  so that

$$G_1(\theta) = \theta\alpha_{\max} - \frac{1}{2} \int \log(H_{\max}(\lambda_{\max} - \lambda)) d\mu_E(\lambda).$$

This concludes the proof of  $G_1$ .

- The case  $G_2$  is very similar.

By virtue of Lemmata 2.5.7 and 2.5.8, to finish the proof of Theorem 2.1.6, we have now

1. to compare  $G|_{I'}$ ,  $G_1|_{I'}$  and  $G_2|_{I'}$  to get  $I_{\mu_E|I'}$ .  
Since  $\lim_{\alpha \uparrow H_{\max}} j_\theta(\alpha) = G_1(\theta)$  and  $\lim_{\alpha \downarrow H_{\min}} j_\theta(\alpha) = G_2(\theta)$  whereas  $G(\theta) = \sup_{\alpha \in I'} [j_\theta(\alpha)]$ , we get that  $I_{\mu_E|I'} = G|_{I'}$ .
2. if  $H_{\max} < +\infty$ , to compare  $G|_{\{2\theta > H_{\max}\}}$ ,  $G_1|_{\{2\theta > H_{\max}\}}$  and  $G_2|_{\{2\theta > H_{\min}\}}$  to get  $I_{\mu_E| \{2\theta > H_{\max}\}}$ .  
By studying the function  $x \mapsto -\frac{\theta}{x} - \frac{1}{2} \log x$ , which reaches its maximum at  $\theta$ , we can easily deduce that  $G|_{\{2\theta > H_{\max}\}} < G_1|_{\{2\theta > H_{\max}\}}$ .  
Moreover  $G_1|_{\{2\theta > H_{\max}\}}$  and  $G_2|_{\{2\theta > H_{\max}\}}$  are the limits of  $j_\theta$  respectively at  $\alpha_{\max}$  and  $\alpha_{\min}$  and we know that in the case  $2\theta > H_{\max}$ ,  $j_\theta$  is increasing. This gives  $G_2|_{\{2\theta > H_{\max}\}} < G_1|_{\{2\theta > H_{\max}\}}$ .  
In this case we conclude that the maximum is given by  $G_1|_{\{2\theta > H_{\max}\}}$ .
3. Arguing similarly, we can see that in the case where  $2\theta < H_{\min}$  the maximum is given by  $G_2|_{\{2\theta < H_{\min}\}}$ .

To conclude the proof of Theorem 2.1.6, we use the continuity of  $I_{\mu_E}$  with respect to  $\theta$  given by the first point of Lemma 2.2.1 to specify its value at  $\lambda_{\min}$ ,  $\alpha_{\min}$ ,  $\alpha_{\max}$  and  $\lambda_{\max}$ . ■

## 2.6 Asymptotic independence and free convolution

In this section, we want to prove Theorem 2.1.5, that is to say concentration and decorrelation properties for the spherical integrals.

We recall first that as an immediate Corollary of Theorem 2.1.5, we get that

**Corollary 2.6.1** *For  $\theta$  sufficiently small*

$$R_{\mu_B \boxplus \mu_A}(\theta) = R_{\mu_A}(\theta) + R_{\mu_B}(\theta),$$

where  $\boxplus$  denotes the free convolution of measures.

**Proof.** In fact, being given  $\mu_A, \mu_B$ , we take  $\lambda_1(A)$  (resp.  $\lambda_1(B)$ ) to be the lower edge of the support of  $\mu_A$  (resp.  $\mu_B$ ) and then set for  $i \geq 2$

$$\lambda_i(A) = \inf \left\{ x \geq \lambda_{i-1}(A) : \mu_A([\lambda_1(A), x]) \geq \frac{i}{N} \right\}, \quad \lambda_i(B) = \inf \left\{ x \geq \lambda_{i-1}(A) : \mu_B([\lambda_1(B), x]) \geq \frac{i}{N} \right\}$$

It is easily seen that with this choice,  $A_N = \text{diag}(\lambda_i(A))$  and  $B_N = \text{diag}(\lambda_i(B))$  satisfy Hypothesis 2.1.1. Since  $\mu_A$  and  $\mu_B$  are compactly supported,  $A_N$  and  $B_N$  have uniformly bounded spectral radius and so does  $A_N + UB_NU^*$ . Hence, for  $\theta$  small enough,  $A_N, B_N$  and  $A_N + UB_NU^*$  satisfy the hypotheses of Theorem 2.1.2 (recall that  $A_N$  and  $UB_NU^*$  are asymptotically free (c.f Theorem 5.2 in [17]) so that  $\hat{\mu}_{A_N + UB_NU^*}^N$  converges towards  $\mu_B \boxplus \mu_A$ ). Moreover, we can check that  $d(\hat{\mu}_{A_N}^N, \mu_A) \leq 2\|A_N\|_\infty N^{-1}$  and similarly for  $\mu_B$  so that  $d(\hat{\mu}_{A_N}^N, \mu_A) + d(\hat{\mu}_{B_N}^N, \mu_B) = o(\sqrt{N}^{-1})$ . Thus, combining Theorem 2.1.5.2 and Theorem 2.1.2 imply

$$\int_0^{2\theta} R_{\mu_B \boxplus \mu_A}(v) dv = \int_0^{2\theta} R_{\mu_A}(v) dv + \int_0^{2\theta} R_{\mu_B}(v) dv.$$

Differentiating with respect to  $\theta$  gives Corollary 2.6.1. ■

Since the  $R$ -transform is analytic in a neighbourhood of the origin, this entails the famous additivity property of the  $R$ -transform. So, Theorem 2.1.5 provides a new proof of this property, independent of cumulant techniques.

As announced in the introduction, the first step will be to use a result of concentration for orthogonal matrices.

## 2.6.1 Concentration of measure for orthogonal matrices

In this section, we prove the first point of Theorem 2.1.5 that relies on the following lemma, which is a direct consequence of a theorem due to Gromov and Milman [32]

**Lemma 2.6.2** *[Gromov-Milman, [32], p. 844 and 846] Let  $M_N^{(1)}$  denote the Haar measure on the special orthogonal group  $SO(N)$ . There exists a positive constant  $c > 0$ , independent of  $N$ , such that for any function  $F : SO(N) \rightarrow \mathbb{R}$  so that there is a real  $\|F\|_{\mathcal{L}}$  such that, for any  $U, U' \in SO(N)$*

$$|F(U) - F(U')| \leq \|F\|_{\mathcal{L}} \left( \sum_{i,j=1}^N |u_{ij} - u'_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

then, for any  $\varepsilon > 0$ ,

$$M_N^{(1)} \left( \left| F(U) - \int F(U) dM_N^{(1)}(U) \right| \geq \varepsilon \right) \leq e^{-cN\|F\|_{\mathcal{L}}^2 \varepsilon^2}.$$

**Proof of lemma 2.6.2 :**

In [32], the authors prove such a lemma using the fact that the Ricci curvature of  $SO(N)$  is of order<sup>b</sup>  $N$ , and their result holds when  $F$  is Lipschitz with respect to the standard bivariant metric which measures the length of the geodesic in  $SO(N)$  between two elements  $U, U' \in SO(N)$ . This distance is of course greater than the length of the geodesic in the whole space of matrices, given by the Euclidean distance, so that Lemma 2.6.2 is a direct consequence of [32].  $\blacksquare$

To get 2.1.5.1, we now apply our result with  $F$  given by  $F(U_N) = \frac{1}{N} \log I_N(\theta, A_N + U_N B U_N^*)$ . To get (2.8), we have to check that this  $F$  satisfies the hypotheses of Lemma 2.6.2. i.e. that  $F$  is Lipschitz.

We have, for any matrices  $W, \tilde{W}$  in  $M_N := \{W \in \mathcal{M}_N(\mathbb{C}); WW^* \leq 1\}$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \log I_N(\theta, A_N + W B_N W^*) - \frac{1}{N} \log I_N(\theta, A_N + \tilde{W} B_N \tilde{W}^*) \right| &\leq 2\theta \|B\|_\infty \sup_{\|v\|=1} \langle v, |W - \tilde{W}|v \rangle \\ &\leq 2\theta \|B\|_\infty \left( \sum_{i,j=1}^N |w_{ij} - \tilde{w}_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Moreover, if  $T$  is for example the transformation changing the first column vector  $U_1$  of the matrix  $U$  into  $-U_1$ ,  $O(N) = SO(N) \sqcup T(SO(N))$ . Note that

$$F(TU) = \frac{1}{N} \log I_N(\theta, A_N + (TU_N) B_N (TU_N)^*) = \frac{1}{N} \log I_N(\theta, T^* A_N T + U_N B_N (U_N)^*).$$

Now, if we set  $E_N = A_N + U_N B U_N^*$  and  $E'_N = T^* A_N T + U_N B U_N^*$ , we easily see that

$$d(\hat{\mu}_{E_N}^N, \hat{\mu}_{E'_N}^N) \leq \frac{1}{N} \text{tr} |E'_N - E_N| \leq \frac{2\|A\|_\infty}{N}.$$

Hence, Lemma 2.2.1.3 implies that

$$\delta_N = \sup_{U \in SO(N)} |F(U) - F(TU)| \rightarrow 0 \text{ as } N \rightarrow \infty$$

Since

$$\int_{O(N)} F(U) dm_N^{(1)}(U) = \frac{1}{2} \int_{SO(N)} F(U) dM_N^{(1)}(U) + \frac{1}{2} \int_{SO(N)} F(TU) dM_N^{(1)}(U),$$

we deduce that

$$\left| \int_{O(N)} F(U) dm_N^{(1)}(U) - \int_{SO(N)} F(U) dM_N^{(1)}(U) \right| \leq \delta_N.$$

Thus, Lemma 2.6.2 implies that for  $\varepsilon > 0$

$$M_N^{(1)} \left( \left| F(U) - \int_{O(N)} F(U) dm_N^{(1)}(U) \right| \geq \varepsilon + \delta_N \right) \leq e^{-cN \|F\|_{\mathcal{L}}^{-2} \varepsilon^2} \quad (2.46)$$

and similarly for  $F(TU)$  so that

$$m_N^{(1)} \left( \left| F(U) - \int_{O(N)} F(U) dm_N^{(1)}(U) \right| \geq \varepsilon + \delta_N \right) \leq e^{-cN \|F\|_{\mathcal{L}}^{-2} \varepsilon^2},$$

what gives Theorem 2.1.5.1.  $\blacksquare$

<sup>b</sup>In [32], it is reported that the Ricci curvature is given by  $N/4$  whereas J.C Sikorav and Y. Ollivier reported to us that it is in fact  $(N-2)/2$ .

### 2.6.2 Exchanging integration with the logarithm

We are now seeking to establish the second point of Theorem 2.1.5. By Jensen's inequality,

$$\mathbb{E}[\log I_N(\theta, A_N + V_N B_N(V_N)^*)] \leq \log \mathbb{E}[I_N(\theta, A_N + V_N B_N(V_N)^*)]$$

so that we only need here to prove the converse inequality.

The whole idea to get it is contained in the following

**Lemma 2.6.3** *For any uniformly bounded sequence of matrices  $(A_N, B_N)_{N \in \mathbb{N}}$  and  $\theta$  small enough, there exists a finite constant  $C(A, B, \theta)$  such that for  $N$  large enough*

$$\frac{\mathbb{E}[I_N(\theta, A_N + V_N B_N(V_N)^*)^2]}{\mathbb{E}[I_N(\theta, A_N + V_N B_N(V_N)^*)]^2} \leq C(\theta, A, B)$$

Let us conclude the **proof of Theorem 2.1.5.2** before proving this lemma.

Hereafter,  $\varepsilon > 0$  is fixed. We introduce the event

$$\mathcal{A} = \left\{ I_N(\theta, A_N + V_N B_N(V_N)^*) \geq \frac{1}{2} \mathbb{E}[I_N(\theta, A_N + V_N B_N(V_N)^*)] \right\}$$

Following [71], we have, if  $I_N := I_N(\theta, A_N + V_N B_N(V_N)^*)$  that

$$\mathbb{E}[I_N] = \mathbb{E}[I_N \mathbf{1}_{\mathcal{A}^c}] + \mathbb{E}[I_N \mathbf{1}_{\mathcal{A}}] \leq \frac{1}{2} \mathbb{E}[I_N] + \mathbb{E}[I_N^2]^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}(\mathcal{A})^{\frac{1}{2}}$$

so that

$$\frac{1}{4C(A, B, \theta)} \leq \mathbb{P}(\mathcal{A}).$$

Furthermore, let

$$t = \frac{1}{N} \log \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2} I_N(\theta, A_N + V_N B_N(V_N)^*) \right] - \frac{1}{N} \mathbb{E}[\log I_N(\theta, A_N + V_N B_N(V_N)^*)]$$

We can assume that  $t \geq \delta_N$  ( $\delta_N$  being given in (2.46)) since otherwise we are done. We then get by (2.46) that for any  $t \geq \delta_N$  and  $N$  large enough,

$$\mathbb{P}(\mathcal{A}) \leq \mathbb{P} \left( \frac{1}{N} \log I_N(\theta, A_N + U B_N U^*) - m_N^{(1)} \left( \frac{1}{N} \log I_N(\theta, A_N + U B_N U^*) \right) \geq t \right) \leq e^{-cN(t-\delta_N)^2}$$

with  $c' = c(2|\theta| \|B\|_\infty)^{-2}$ . As a consequence,

$$\frac{1}{4C(A, B, \theta)} \leq e^{-c'N(t-\delta_N)^2}, \quad \text{so that} \quad t \leq \delta_N + \left( \frac{1}{c'N} \log(4C(A, B, \theta)) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Hence, since  $\delta_N$  goes to zero with  $N$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \log \mathbb{E} \left[ \frac{1}{2} I_N(\theta, A_N + V_N B_N(V_N)^*) \right] - \frac{1}{N} \mathbb{E}[\log I_N(\theta, A_N + V_N B_N(V_N)^*)] \right) = 0$$



which completes the proof of Theorem 2.1.5.2. ■

We go back to the **proof of Lemma 2.6.3**. Observe first that

$$\begin{aligned} L_N(\theta, A, B) &:= \mathbb{E}[I_N(\theta, A_N + V_N B_N (V_N)^*)^2] \\ &= \int e^{\theta N((UAU^*)_{11} + (\tilde{U}A\tilde{U}^*)_{11} + (UV_N B (UV_N)^*)_{11} + (\tilde{U}V_N B (\tilde{U}V_N)^*)_{11})} dm_N^{(1)}(U) dm_N^{(1)}(\tilde{U}) dm_N^{(1)}(V_N) \\ &= \int e^{\theta N((UAU^*)_{11} + (\tilde{U}A\tilde{U}^*)_{11} + (VBV^*)_{11} + (\tilde{U}U^* V B V^* U \tilde{U}^*)_{11})} dm_N^{(1)}(V) dm_N^{(1)}(U) dm_N^{(1)}(\tilde{U}) \end{aligned}$$

where we used that  $m_N^{(1)}$  is invariant by the action of the orthogonal group. We shall now prove that  $L_N(\theta, A, B)$  factorizes. The proof requires sharp estimates of spherical integrals. We already got the kind of estimates we need in section 2.3. The ideas here will be very similar although the calculations will be more involved.

To rewrite  $L_N(\theta, A, B)$  in a more proper way, the key observation is that, if we consider the column vector  $W := (V^* U \tilde{U}^*)_1$  then  $\langle V_1, W \rangle = \langle U_1, \tilde{U}_1 \rangle$  so that we have the decomposition

$$W = \langle U_1, \tilde{U}_1 \rangle V_1 + (1 - |\langle U_1, \tilde{U}_1 \rangle|^2)^{\frac{1}{2}} V_2$$

with  $(V_1, V_2)$  orthogonal and distributed uniformly on the sphere. Therefore,

$$L_N(\theta, A, B) = \mathbb{E} [\exp\{N\theta(F_1^N + F_2^N + F_3^N + F_4^N + F_5^N)\}]$$

with

$$\begin{aligned} F_1^N &= \langle U, AU \rangle \\ F_2^N &= \langle \tilde{U}, A\tilde{U} \rangle \\ F_3^N &= (1 + \langle U, \tilde{U} \rangle^2) \langle V_1, BV_1 \rangle \\ F_4^N &= 2(1 - |\langle U, \tilde{U} \rangle|^2)^{\frac{1}{2}} \langle U, \tilde{U} \rangle \langle V_1, BV_2 \rangle \\ F_5^N &= (1 - \langle U, \tilde{U} \rangle^2) \langle V_2, BV_2 \rangle \end{aligned}$$

where  $U, \tilde{U}$  are two independent vectors following the uniform law on the sphere of radius  $\sqrt{N}$  in  $\mathbb{R}^N$  and  $V_1, V_2$  are the two first column vectors of a matrix  $V$  following  $m_N^{(1)}$ ,  $U, \tilde{U}$  and  $V$  being independent.

We now adopt the same strategy as in section 2.3 to show that the  $F_i$ 's will become asymptotically independent (or negligible). More precisely, we use again Fact 2.1.8 and recall that we can write  $U = \frac{g^{(1)}}{\|g^{(1)}\|}$ ,  $\tilde{U} = \frac{g^{(2)}}{\|g^{(2)}\|}$ ,  $V_1 = \frac{g^{(3)}}{\|g^{(3)}\|}$  and  $V_2 = \frac{G}{\|G\|}$  with  $G = g^{(4)} - \frac{\langle g^{(3)}, g^{(4)} \rangle}{\|g^{(4)}\|^2} g^{(3)}$  where  $g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}$  and  $g^{(4)}$  are 4 i.i.d standard Gaussian vectors. We now set for  $i = 1, 2, 3, 4$ , with  $\lambda_j^{(i)}$  the eigenvalues of  $A$  for  $i = 1$  or  $2$  and of  $B$  for  $i = 3$  or  $4$ ,  $v_i = R_{\mu_A}(2\theta)$  for  $i = 1$  or  $2$ ,  $v_i = R_{\mu_B}(2\theta)$  for  $i = 3$  or  $4$ ,

$$\hat{U}_i^N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (g_j^{(i)})^2 - 1, \text{ and } \hat{V}_i^N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{(i)} (g_j^{(i)})^2 - v_i$$

Moreover, we let for  $i = 1$  or  $2$ ,

$$\hat{W}_i^N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \lambda_j^{(i)} g_j^{(2i-1)} g_j^{(2i)} \quad \text{and} \quad \hat{Z}_i^N = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N g_j^{(2i-1)} g_j^{(2i)}.$$

Under the Gaussian measure, all these quantities are going to zero almost surely and we can localize  $L_N$  as we made it in section 2.2, that is to say restrict the integration to the event  $A'_N := \left\{ \hat{U}_i^N, \hat{V}_i^N, \hat{W}_i^N, \hat{Z}_i^N \text{ are } o(N^{-\frac{1}{2}+\kappa}) \right\}$ , for any  $\kappa > 0$ . We then express the  $F_i$ 's as function of these variables and on  $A'_N$  we expand them till  $o(N^{-1})$ . On  $A'_N$ ,

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{\hat{V}_1^N + v_1}{\hat{U}_1^N + 1} \\ &= v_1 + (\hat{V}_1^N - v_1 \hat{U}_1^N) - \hat{U}_1^N (\hat{V}_1^N - v_1 \hat{U}_1^N) + o(N^{-1}) \\ F_2 &= \frac{\hat{V}_2^N + v_1}{\hat{U}_2^N + 1} \\ &= v_1 + (\hat{V}_2^N - v_1 \hat{U}_2^N) - \hat{U}_2^N (\hat{V}_2^N - v_1 \hat{U}_2^N) + o(N^{-1}) \\ F_3 &= \left( 1 + \frac{(\hat{Z}_1^N)^2}{(1 + \hat{U}_1^N)(1 + \hat{U}_2^N)} \right) \frac{\hat{V}_3^N + v_2}{\hat{U}_3^N + 1} \\ &= v_2 + (\hat{V}_3^N - v_2 \hat{U}_3^N) - \hat{U}_3^N (\hat{V}_3^N - v_2 \hat{U}_3^N) + v_2 (\hat{Z}_1^N)^2 + o(N^{-1}) \\ F_4 &= 2 \left( \frac{1 - (\hat{Z}_1^N)^2 (1 + \hat{U}_1^N)^{-1} (1 + \hat{U}_2^N)^{-1}}{(1 + \hat{U}_3^N)(1 + \hat{U}_4^N - (1 + \hat{U}_3^N)^{-1} (\hat{Z}_2^N)^2)} \right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{Re} \left( \hat{Z}_1^N (\hat{W}_2^N - \hat{Z}_2^N \frac{v_2 + \hat{V}_3^N}{1 + \hat{U}_3^N}) \right) \\ &= 2 \hat{Z}_1^N (\hat{W}_2^N - v_2 \hat{Z}_2^N) + o(N^{-1}) \\ F_5 &= \frac{1 - \frac{(\hat{Z}_1^N)^2}{(1 + \hat{U}_1^N)(1 + \hat{U}_2^N)}}{1 + \hat{U}_4^N - (1 + \hat{U}_3^N)^{-1} (\hat{Z}_2^N)^2} \left( v_2 + \hat{V}_4^N - 2 \hat{W}_2^N \frac{\hat{Z}_2^N}{1 + \hat{U}_3^N} + \frac{(\hat{Z}_2^N)^2}{(1 + \hat{U}_3^N)^2} (v_2 + \hat{V}_3^N) \right) \\ &= v_2 + (\hat{V}_4^N - v_2 \hat{U}_4^N) - v_2 (\hat{Z}_1^N)^2 + 2v_2 (\hat{Z}_2^N)^2 + v_2 (\hat{U}_4^N)^2 - \hat{U}_4^N \hat{V}_4^N - 2 \hat{W}_2^N \hat{Z}_2^N + o(N^{-1}), \end{aligned}$$

so that we get that the full second order in  $\sum_i F_i$  is

$$\Xi^N = - \sum_{i=1}^4 \hat{U}_i^N (\hat{V}_i^N - v_i \hat{U}_i^N) + 2(\hat{Z}_1^N - \hat{Z}_2^N) \hat{W}_2^N - 2v_2 \hat{Z}_2^N \hat{Z}_1^N + 2v_2 (\hat{Z}_2^N)^2$$

Now, as before, we consider the shifted probability measure  $P_N$  (which contains all the first order terms above) under which  $(\tilde{g}^{(i)})_{i=1, \dots, 4}$  defined by  $\tilde{g}_j^{(i)} = \sqrt{1 + 2\theta v_i - 2\theta \lambda_j^{(i)}} g_j^{(i)}$  are i.i.d. standard Gaussian vectors.

Under  $P_N$ , the  $(\hat{U}_i^N, \hat{V}_i^N)_{1 \leq i \leq 4}$  are still independent with the same law than for the one dimensional case. Moreover, we see that for  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $j = 1, 2$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E}[\hat{U}_i^N \hat{Z}_j^N] = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} N \mathbb{E}[\hat{U}_i^N \hat{W}_j^N] = 0.$$

Similarly,  $(\hat{Z}_i^N, \hat{W}_i^N)_{i=1,2}$  are asymptotically uncorrelated. Moreover, with  $\mu_1 = \mu_A$  and  $\mu_2 = \mu_B$ ,

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow \infty} N\mathbb{E}[\hat{W}_i^N \hat{Z}_i^N] &= \int \frac{x}{(1 + 2\theta(v_i - x))^2} d\mu_i(x) \\ \lim_{N \rightarrow \infty} N\mathbb{E}[(\hat{W}_i^N)^2] &= \int \frac{x^2}{(1 + 2\theta(v_i - x))^2} d\mu_i(x) \\ \lim_{N \rightarrow \infty} N\mathbb{E}[(\hat{Z}_i^N)^2] &= \int \frac{1}{(1 + 2\theta(v_i - x))^2} d\mu_i(x).\end{aligned}$$

Thus, with  $G_i^N = \theta v_i - \frac{1}{2N} \sum_{j=1}^N \log(1 - 2\theta \lambda_j^{(i)} + 2\theta v_i)$  and if the Gaussian integral is well defined, we have

$$\begin{aligned}L_N(\theta, A, B) &= \frac{e^{2NG_1^N + 2NG_2^N}}{\det(K_A) \det(K_B)} \\ &\quad \int \exp\{2\theta(\hat{z}_1 - \hat{z}_2)\hat{w}_2 - 2v_2\theta\hat{z}_2\hat{z}_1 + 2v_2\theta(\hat{z}_2)^2\} \prod_{i=1,2} dP_i(\hat{w}_i, \hat{z}_i)(1 + o(1))\end{aligned}$$

with  $P_i$  the law of two Gaussian variables with covariance matrix

$$\frac{R_i}{2} = \begin{pmatrix} \int \frac{1}{(1+2\theta(v_i-x))^2} d\mu_i(x) & \int \frac{x}{(1+2\theta(v_i-x))^2} d\mu_i(x) \\ \int \frac{x}{(1+2\theta(v_i-x))^2} d\mu_i(x) & \int \frac{x^2}{(1+2\theta(v_i-x))^2} d\mu_i(x) \end{pmatrix}$$

and  $K_A$  and  $K_B$  as defined in (2.38) if we replace  $\mu_E$  therein respectively by  $\mu_A$  or  $\mu_B$ .

Again, as in the proofs of Theorems 2.1.3 and 2.1.4, this convergence follows from the ideas of [11], detailed in our context in the Appendix below.

We now integrate on the variables  $(\hat{z}_2, \hat{w}_2)$  so that the Gaussian computation gives

$$L_N(\theta, A, B) = \frac{e^{2NG_1^N + 2NG_2^N}}{\det(K_A) \det(K_B)^{\frac{3}{2}}} \int \exp\{\theta^2 \langle e, K_B^{-1} e \rangle \hat{z}_1^2\} dP_1(\hat{z}_1, \hat{w}_1)(1 + o(1))$$

with  $e = (-v_2, 1)$ . To show that the remaining integral is finite it is enough to check that

$$-2\theta^2 \langle e, K_B^{-1} e \rangle + \text{var} \hat{z}_1 \geq 0,$$

at least for  $\theta$  small enough. But we can check that  $\theta^2 \langle e, K_B^{-1} e \rangle \approx \theta^2 \sigma_2$ , with  $\sigma_2 = \int x^2 d\mu_B(x)$  whereas the variance of  $\hat{z}_1$  is of order 1.

This finishes to prove that for sufficiently small  $\theta$ 's there exists a finite constant  $C(\theta, A, B)$  such that

$$L_N(\theta, A, B) = \frac{e^{2NG_1^N + 2NG_2^N}}{\det(K_A) \det(K_B)} C(\theta, A, B)(1 + o(1))$$

Since on the other hand we have seen in section 2.3 that

$$I_N(\theta, A) = \frac{e^{NG_1^N}}{\det K_A^{\frac{1}{2}}}(1 + o(1)) \text{ and } I_N(\theta, B) = \frac{e^{NG_2^N}}{\det K_B^{\frac{1}{2}}}(1 + o(1)),$$

we have proved Lemma 2.6.3. ■

## 2.7 Appendix

In this Appendix, we clarify the derivation of the central limit theorem of Theorems 2.1.3 and 2.1.4 and Lemma 2.6.3. We follow the ideas of [11], where only sums of i.i.d entries  $N^{-1} \sum_{i=1}^N x_i$  were considered rather than ponderated sums  $N^{-1} \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i$ . We consider the case of Theorem 2.1.4 which is the most involved.

We recall that we got

$$I_N(\theta, E_N) = \prod_{i=1}^N \sqrt{\zeta_i} e^{N\theta v} \int \exp \left\{ N\theta \frac{\gamma_N(v\gamma_N - \hat{\gamma}_N)}{1 + \gamma_N} \right\} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N g_i^2} \prod_{i=1}^N dg_i, \quad (2.47)$$

with  $\zeta_i := (1 + 2\theta v - 2\theta \lambda_i)^{-1}$ ,  $\gamma_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \zeta_i g_i^2 - 1$  and  $\hat{\gamma}_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i \zeta_i g_i^2 - v$ . We denote

$$J_N(\theta, E_N) = \sqrt{2\pi}^{-N} \int \exp \left\{ N\theta \frac{\gamma_N(v\gamma_N - \hat{\gamma}_N)}{1 + \gamma_N} \right\} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N g_i^2} \prod_{i=1}^N dg_i.$$

- The first step is to derive a large deviation principle for  $(\gamma_N, \hat{\gamma}_N)$  under the Gibbs measure

$$\mu_N^\theta(dg) = J_N(\theta, E_N)^{-1} \exp \left\{ N\theta \frac{\gamma_N(v\gamma_N - \hat{\gamma}_N)}{1 + \gamma_N} \right\} \prod_{i=1}^N P(dg_i).$$

As we showed that the unique minimizer is zero, it entitles us to write

$$J_N(\theta, E_N) = (1 + \delta(\varepsilon, \varepsilon', N)) J_N^{\varepsilon, \varepsilon'}(\theta, E_N)$$

with

$$J_N^{\varepsilon, \varepsilon'}(\theta, E_N) = \int_{|\gamma_N| \leq \varepsilon, |\hat{\gamma}_N| \leq \varepsilon'} \exp \left\{ N\theta \frac{\gamma_N(v\gamma_N - \hat{\gamma}_N)}{1 + \gamma_N} \right\} \prod_{i=1}^N P(dg_i)$$

where  $\delta(\varepsilon, \varepsilon', N)$  goes to zero as  $N$  goes to infinity for any  $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ .

- Let us assume that we can take above

$$\varepsilon = M/\sqrt{N}, \quad \varepsilon' = M'/\sqrt{N} \quad \text{with} \quad \delta(M/\sqrt{N}, M'/\sqrt{N}, N)$$

going to zero as  $N$  and then  $M, M'$  go to infinity. On the set  $\{|\gamma_N| \leq N^{-\frac{1}{2}}M, |\hat{\gamma}_N| \leq N^{-\frac{1}{2}}M'\}$ ,

$$\begin{aligned} f(\sqrt{N}\gamma_N, \sqrt{N}\hat{\gamma}_N) &:= N\theta \frac{\gamma_N(v\gamma_N - \hat{\gamma}_N)}{1 + \gamma_N} \\ &= N\theta \gamma_N(v\gamma_N - \hat{\gamma}_N) + O((M + M')^3 N^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

so that  $f(\sqrt{N}\gamma_N, \sqrt{N}\hat{\gamma}_N)$  is uniformly bounded. Further, the law of  $(N^{\frac{1}{2}}\gamma_N, N^{\frac{1}{2}}\hat{\gamma}_N)$  converges under  $P^{\otimes N}$  towards a two-dimensional complex Gaussian process with covariance matrix  $R'(\theta)$ . Hence, we can apply dominated convergence theorem to see that

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|\gamma_N| \leq N^{-\frac{1}{2}}M, |\hat{\gamma}_N| \leq N^{-\frac{1}{2}}M'} \exp \left\{ N\theta \frac{\gamma_N(v\gamma_N - \hat{\gamma}_N)}{1 + \gamma_N} \right\} \prod_{i=1}^N P(dg_i) \\ = (2\pi)^{-2} \det(K'(\theta))^{-\frac{1}{2}} \int_{|x| \leq M, |y| \leq M'} e^{\theta x(vx-y) - \frac{1}{2} \langle (x,y), R'(\theta)^{-1}(x,y) \rangle} dx dy. \end{aligned}$$

In the proof of Theorem 2.1.3, we established that the bilinear form

$$x, y \mapsto \theta x(vx - y) - \frac{1}{2} \langle (x, y), R'(\theta)^{-1}(x, y) \rangle$$

is strictly negative for  $|\theta|$  small enough, therefore we can now let  $M, M'$  going to infinity to obtain a limit.

• To see that we can take  $\varepsilon = M/\sqrt{N}, \varepsilon' = M'/\sqrt{N}$ , we can simplify the argument by recalling that the spherical integral does not depend on  $\gamma_N$ . Therefore,

$$(1 - P^{\otimes N}(\varepsilon \geq |\gamma_N| \geq M\sqrt{N}^{-1})) J_N^{\varepsilon, \varepsilon'}(\theta, E_N) = J_N^{MN^{-\frac{1}{2}}, \varepsilon'}(\theta, E_N)$$

But,  $\sqrt{N}\gamma_N = G_N^1 + iG_N^2$  has, under  $P^{\otimes N}$ , sub-Gaussian exponential moments since

$$\mathbb{E}[e^{aG_N^j}] = \prod_{i=1}^N [(1 - 2a\sqrt{N}^{-1}\zeta_j(\lambda_i))^{-\frac{1}{2}} e^{-a\sqrt{N}^{-1}\zeta_j(\lambda_i)}] \leq e^{ca^2}$$

for some finite constant  $c$  which only depends on a uniform bound on the  $\zeta_j(\lambda_i)$ , where we recall that  $\zeta_j(\lambda_i) = \operatorname{Re}\zeta_i$  if  $j = 1$  and  $\zeta_j(\lambda_i) = \operatorname{Im}\zeta_i$  if  $j = 2$ . By Chebychev inequality, we therefore conclude that for  $M$  big enough,

$$P^{\otimes N}(|\gamma_N| \geq M\sqrt{N}^{-1}) \leq e^{-\frac{c}{8}M^2}.$$

Finally let us consider

$$J_N^{M, M', \varepsilon'} = \int_{|\gamma_N| \leq M\sqrt{N}^{-1}, M'\sqrt{N}^{-1} \leq |\hat{\gamma}_N| \leq \varepsilon'} \exp \left\{ N\theta \frac{\gamma_N(v\gamma_N - \hat{\gamma}_N)}{1 + \gamma_N} \right\} \prod_{i=1}^N P(dg_i).$$

Clearly, we find a finite constant  $C$  (depending on  $\theta$  and  $\varepsilon'$ ) such that

$$|J_N^{M, M', \varepsilon'}| \leq e^{CM^2} \int_{|\gamma_N| \leq M\sqrt{N}^{-1}, M'\sqrt{N}^{-1} \leq |\hat{\gamma}_N| \leq \varepsilon'} \exp \left\{ CM|\sqrt{N}\hat{\gamma}_N| \right\} dP^{\otimes N}(g).$$

Again,  $\sqrt{N}\hat{\gamma}_N$  has sub-Gaussian tail so that we find  $C' > 0$  so that

$$|J_N^{M, M', \varepsilon'}| \leq e^{(C + \frac{C^2}{C'})M^2 - C'(M')^2}.$$

Now, by the previous point, we know that

$$\begin{aligned} I(\theta, \mu_E) &= \lim_{M, M' \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{|\gamma_N| \leq N^{-\frac{1}{2}}M, |\hat{\gamma}_N| \leq N^{-\frac{1}{2}}M'} e^{\left\{ N\theta \frac{\gamma_N(v\gamma_N - \hat{\gamma}_N)}{1 + \gamma_N} \right\}} \prod_{i=1}^N P(dg_i) \\ &= (2\pi)^{-2} \det(R'(\theta))^{-\frac{1}{2}} \int e^{\theta x(vx - y) - \frac{1}{2} \langle (x, y), R'(\theta)^{-1}(x, y) \rangle} dx dy \end{aligned}$$

exists and moreover goes to one as  $\theta$  goes to zero. Hence, for  $|\theta|$  small enough, this term dominates  $J_N^{M, M', \varepsilon'}$  for  $N, M, M'$  large enough ( $M' \gg M$ ) and we conclude that

$$\lim_{N \rightarrow \infty} J_N(\theta, E_N) = \lim_{M, M' \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} J_N^{MN^{-\frac{1}{2}}, M'N^{-\frac{1}{2}}} = I(\theta, \mu_E).$$

Of course, this strategy only requires non-degeneracy of the minimum and  $I(\theta, \mu_E) \neq 0$ . In the setting of Theorem 2.1.3, we checked that this is verified on the whole interval  $2\theta \in H_{\mu_E}([\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^c)$ ; in the case of Theorem 2.1.4 we know that this is the case at least in a small neighbourhood of the origin and in Lemma 2.6.3, we can also get it by noting that  $L_N(\theta, A, B)$  does not depend on  $(\|g^{(1)}\|, \|g^{(2)}\|, \|g^{(3)}\|, \|G\|)$  to localize these quantities and proceed.

## Chapitre 3

# Largest eigenvalue of a Wigner matrix perturbed by a finite rank deterministic matrix

Ce chapitre constitue le début d'un travail en cours, en collaboration avec S. Péché.

### 3.1 Introduction

In the work [5], the authors were interested in finding the limiting distributions of finitely many of the largest eigenvalues of a complex Gaussian sample covariance matrix (also called Wishart matrices) when both the number of samples and the number of variables of each sample become large, in the special regime where all but finitely many eigenvalues of  $\Sigma$  are equal to 1, where  $\Sigma$  is the covariance matrix of a sample vector, all of them being iid Gaussian.

In the case when  $\Sigma = \text{Id}$ , the limiting density of eigenvalues (the so-called Marčenko-Pastur distribution, see [55], [68]), the limit of the largest eigenvalue (which is in this case the edge of the support of the Marčenko-Pastur distribution, refer to [29]) and even its limiting distribution after a proper scaling (the so-called Tracy-Widom distribution [28], [48]) are well known. Of course, considering a covariance matrix  $\Sigma$  with all but finitely many eigenvalues equal to one does not affect the limiting distribution of eigenvalues but could affect finitely many of the largest ones : it has been shown in the PhD thesis [63] that if the eigenvalues of  $\Sigma$  different from one are “not too big”, the largest eigenvalue still converges to the edge of the support of the Marčenko-Pastur distribution.

In the article [5] (the results are detailed in section 1.3 therein), they find a critical value for the eigenvalues of  $\Sigma$  above which some eigenvalues separate from the bulk, they determine their limits and even their limiting distributions after a proper scaling. They even show that if  $k$  eigenvalues of  $\Sigma$  are exceeding the critical value, then the  $k$  largest eigenvalues of the Wishart matrix will separate from the bulk.

In a recent preprint [64], S. Péché could obtain similar results for the so-called “deformed Wigner ensemble”, that is matrices of the form  $X_N = W_N + A_N$ , where  $W_N$  belongs to the GUE and  $A_N$  is deterministic with finite rank, that is with all but finitely many eigenvalues equal to zero.

In [5], [64] as in [63], the proofs are based on the explicit knowledge of the joint law of the eigenvalues from which can be deduced an expression of the distribution of the largest one(s) in

terms of Fredholm determinants, that they can represent as a contour integral, whose asymptotics can be obtained via some hard piece of complex analysis. The problem of this method is that it is deeply related to the complex nature of the samples : it works very well in the case of complex sample covariance matrix or deformed Hermitian matrices and give very precise informations, even on the limiting distributions but it is of no help concerning the real case (that is real sample covariance matrix or deformed symmetric matrix). Unfortunately, it seems that this real case is particularly relevant in many applications, such as learning theory [45] or financial data analysis (refer for example to [53, 65]). In [5], the authors even formulate a conjecture about this real case : according to them, the same kind of results as in the complex case should hold, with the same critical values and scalings — however involving different limiting distributions.

This is precisely the point we try to address in this work : we deal with the largest eigenvalues of  $W_N + A_N$ , where  $W_N$  is a random symmetric matrix from the GOE and  $A_N$  a deterministic matrix with finite rank. We won't be able to tell anything about limiting distributions but large deviations techniques seems to be well adapted to deal with the convergence of the largest eigenvalues, using the results on the spherical integrals we established in chapter 2. As we already mentioned therein, our techniques make no difference in dealing with orthogonal or unitary matrices.

Our main result (Theorem 3.2.1) is a large deviation principle for the largest eigenvalue of  $W_N + A_N$  in the case where  $A_N$  is of rank one and an important corollary is that it separates from the bulk (that is does not converge to  $\sqrt{2}$  anymore) as soon as the unique nonzero eigenvalue of  $A_N$  is above a critical value. This is the beginning of a work in which we hope to generalize Theorem 3.2.1 to any finite rank.

## 3.2 The rank one case

### 3.2.1 Large deviation principle for $x_N^*$ and its consequences

Our goal in this section is to state precisely this large deviation principle for the largest eigenvalue of  $X_N := W_N + A_N$ . We first recall or precise some notations :

- $A_N$  is a deterministic matrix of rank one,  $\theta$  denoting the unique nonzero eigenvalue of  $A_N$  (We can suppose without loss of generality that  $\theta > 0$ ; otherwise, we consider a similar problem for  $\theta < 0$  and the smallest eigenvalue of  $W_N + A_N$  instead of the largest)
- and  $W_N$  is a random matrix, distributed according to the GOE<sup>a</sup>.

In this case, the joint law of the eigenvalues of  $X_N$  is given by

$$\mathbb{Q}_N^A(dx_1, \dots, dx_N) = \frac{1}{Z_N^A} e^{-\frac{N}{2} \text{tr} A_N^2} \prod_{i < j} |x_i - x_j| I_N(X_N, A_N) e^{-\frac{N}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2} dx_1 \dots dx_N, \quad (3.1)$$

where  $I_N$  is the spherical integral defined by

$$I_N(X_N, A_N) = \int e^{N \text{tr} O X_N O^* A_N} dm_N(O),$$

with  $m_N$  the Haar probability measure on  $\mathcal{O}_N$ , the orthogonal group of size  $N$  and  $Z_N^A$  a normalizing constant so that  $\mathbb{Q}_N^A$  is a probability measure.

If we denote by  $x_N^* := \max_{i=1 \dots N} x_i$ , we intend to show the following

---

<sup>a</sup>We could also treat the case of the GUE but we already mentioned above that Riemman-Hilbert techniques as developed in [5] seem to be much more efficient than large deviations considerations in the GUE case.



**Theorem 3.2.1**

Under  $\mathbb{Q}_N^A$ , the largest eigenvalue  $x_N^*$  of  $X_N = W_N + A_N$ , where  $A_N := \text{diag}(\theta, 0, \dots, 0)$  with  $\theta > 0$  and  $W_N$  belongs to the GOE, satisfies a large deviation principle, in the scale  $N$ , with good rate function

$$K(x) := \begin{cases} +\infty, & \text{if } x < \sqrt{2}, \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\theta^2 - \Phi(x, \sigma) - I_\sigma(x, \theta), & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where, for  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  and  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\Phi(x, \mu) = \int \log|x - y|d\mu(y) - \frac{1}{2}x^2,$$

and  $I_\mu(x, \theta) = \theta v(x, \theta) - \frac{1}{2} \int \log(1 + 2\theta v(x, \theta) - 2\theta\lambda)d\mu(\lambda),$

with  $v(x, \theta) := \begin{cases} R_\mu(2\theta), & \text{if } H_\mu(x) \geq 2\theta, \\ x - \frac{1}{2\theta}, & \text{otherwise,} \end{cases}$

$\sigma$  denotes the semicircle law,  $R_\mu$  is the R-transform of  $\mu$  and  $H_\mu$  its Hilbert transform (see section 2.1.2 for proper definitions and details).

**Remark 3.2.2** This theorem can be seen as a generalization of the result established in [7] for the largest eigenvalue of a matrix distributed according to the GOE and to prove it, in section 3.2.3, we will follow more or less the strategy used therein, making also use of the results of [36] on the asymptotics of spherical integrals.

An important corollary of this result — that was actually our initial motivation — is the following :

**Corollary 3.2.3** Under  $\mathbb{Q}_N^A$ ,  $x_N^*$  converges almost surely to  $\sqrt{2}$  (which is the edge of the support of  $\sigma$ ) as far as  $\theta \leq \theta_c := \frac{1}{\sqrt{2}}$  and to  $\theta + \frac{1}{2\theta}$  (that is separates from the support) when  $\theta > \theta_c$ .

The end of this subsection is devoted to the **proof of Corollary 3.2.3**, that relies essentially on a careful study of the rate function  $K$  (that will be useful anyway in the proof of Theorem 3.2.1).

We first recall from [7] and Lemma 2.7 of [8] that

$$H_\sigma(x) = x - \sqrt{x^2 - 2} \tag{3.2}$$

and  $-\frac{1}{2} - \Phi(x, \sigma) = \int_{\sqrt{2}}^x \sqrt{z^2 - 2} dz. \tag{3.3}$

- We first look at the case when  $\theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

For  $\sqrt{2} \leq x \leq \theta + \frac{1}{2\theta}$ , we can easily deduce from (3.2) that  $H_\sigma(x) \geq 2\theta$ , so that

$$I_\sigma(x, \theta) = \frac{1}{2} \int_0^{2\theta} R_\sigma(u)du = \frac{1}{2}\theta^2 \tag{3.4}$$

and  $K(x) = \int_{\sqrt{2}}^x \sqrt{z^2 - 2} dz. \tag{3.5}$

For  $x \geq \theta + \frac{1}{2\theta}$ ,

$$K(x) = \frac{1}{2}\theta^2 + \int_{\sqrt{2}}^x \sqrt{z^2 - 2} dz - \theta x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log(2\theta) + \frac{1}{2} \int \log(x - \lambda) d\sigma(\lambda),$$

so that from (3.3), we get that

$$K(x) = \frac{1}{2}\theta^2 - \theta x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log(2\theta) + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^x \sqrt{z^2 - 2} dz. \quad (3.6)$$

• Now if  $\theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $H_\sigma(x)$  is always smaller than  $2\theta$  so that  $K$  can be written as in (3.6) for any value of  $x$  greater than  $\sqrt{2}$ .

To summarize, we have that :

– For  $\theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

$$K(x) = \begin{cases} +\infty & \text{if } x < \sqrt{2}, \\ \int_{\sqrt{2}}^x \sqrt{z^2 - 2} dz, & \text{if } \sqrt{2} \leq x \leq \theta + \frac{1}{2\theta}, \\ \frac{1}{2}\theta^2 - \theta x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log(2\theta) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^x \sqrt{z^2 - 2} dz & \text{if } x \geq \theta + \frac{1}{2\theta}. \end{cases}$$

– For  $\theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,

$$K(x) = \begin{cases} +\infty & \text{if } x < \sqrt{2}, \\ \frac{1}{2}\theta^2 - \theta x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log(2\theta) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^x \sqrt{z^2 - 2} dz & \text{if } x \geq \sqrt{2}. \end{cases}$$

**Remark 3.2.4** Note that, although it is not obvious on this formulation in the first case, we can check by looking carefully at  $I_\sigma$  that for any value of  $\theta$ ,  $K$  is continuous on  $(\sqrt{2}, +\infty)$  and therefore lower semicontinuous on  $\mathbb{R}$ . Furthermore, we can check from the expression of  $K$  on  $[\theta + \frac{1}{2\theta}, +\infty)$  that  $K$  is going to infinity with  $x$  so that for any value of  $\theta$  it is a good rate function.

We now go to the study of the minimizers of  $K$ . The first point is to study the variations of the function defined on  $[\sqrt{2}, +\infty)$  by

$$L(x) := \frac{1}{2}\theta^2 - \theta x + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log(2\theta) + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^x \sqrt{z^2 - 2} dz.$$

We can easily compute

$$L'(x) = -\theta + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2}$$

so that  $L$  is increasing on  $[\sqrt{2}, +\infty)$  if  $\theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  and  $L$  is decreasing on  $[\sqrt{2}, \theta + \frac{1}{2\theta})$  and then increasing on  $[\theta + \frac{1}{2\theta}, +\infty)$  in the case when  $\theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . From that and the expressions of  $K$  above, we deduce that  $K$  is increasing on  $[\sqrt{2}, +\infty)$  as long as  $\theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  and therefore reaches its minimum at  $\sqrt{2}$  in this case whereas its minimum is reached at  $\theta + \frac{1}{2\theta}$  when  $\theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , what concludes the proof of Corollary 3.2.3.

### 3.2.2 Continuity of the spherical integrals

Before going into the proof of Theorem 3.2.1 itself, let us state a continuity property for the spherical integrals that will be useful in the sequel. In view of Theorem 2.1.6, they are not continuous with respect to the spectral measure of the full rank matrix. But if we localize also the largest eigenvalue, we can expect a weaker result as stated in Lemma 3.2.5 below. More precisely, if we denote by  $J_N^\theta(x_1, \hat{\nu}_N) := I_N(A_N, B_N)$  when  $A_N = \text{diag}(\theta, 0, \dots, 0)$ ,  $B_N = \text{diag}(x_1, \dots, x_N)$  and  $\hat{\nu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=2}^N \delta_{x_i}$ , we want to show

**Lemma 3.2.5** *Let  $\kappa > 0$  be fixed. There exists a function  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  going to zero at zero such that if  $\hat{\nu}_N, \hat{\nu}'_N, x_1$  and  $x'_1$  are such that*

- $x_1 \geq \max_{i=2 \dots N} x_i, x'_1 \geq \max_{i=2 \dots N} x'_i,$
- $d(\hat{\nu}_N, \hat{\nu}'_N) \leq \delta \wedge N^{-\kappa},$  where  $d$  denotes the Dudley distance,
- $|x_1 - x'_1| \leq \delta,$

then, for all  $N$  large enough,

$$\left| \frac{1}{N} \log J_N^\theta(x_1, \hat{\nu}_N) - \frac{1}{N} \log J_N^\theta(x'_1, \hat{\nu}'_N) \right| \leq g(\delta).$$

Before going into the proof of this lemma, a key step is to show that we can generalize point 2. of Lemma 2.2.1 to any value of  $\theta$ . If we give a look to the proof of this lemma, we can notice that the only place where we use the hypothesis that  $\theta$  is small enough is to evaluate the variance (2.23) of  $\frac{1}{N} \|g\|^2$  under the measure  $P_N$ . Now, if the largest eigenvalue of  $B_N$ , say  $x_1$ , (or a finite number of them) are separated from the others, the problem is that, for  $v_N$  solution of (2.22),  $1/(1+2\theta v_N - 2\theta x_1)$  can be of order  $N$  so that the variance does not go to zero anymore. To circumvent this difficulty, in the case where  $v_N + 1/2\theta$  is too close from  $x_1$ , we will treat the eigenvalues at the vicinity of  $x_1$  separately from the others. In any case, we intend to show the following result (that can be regarded as having its own interest, as a generalization of Lemma 2.2.1) :

**Lemma 3.2.6** *If there exists a real  $M$  such that for all  $N$ , for  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $|x_i| \leq M$ , then for any value of  $\theta$ , for any  $\delta > 0$ , we have that, for  $N$  large enough,*

$$\left| \frac{1}{N} \log J_N^\theta(x_1, \hat{\nu}_N) - \theta v_N + \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^N \log(1 + 2\theta v_N - 2\theta x_i) \right| \leq \delta,$$

where  $v_N$  is the unique solution of  $\frac{1}{2\theta} H_{B_N} \left( v_N + \frac{1}{2\theta} \right) = 1$ , satisfying the condition that  $v_N + \frac{1}{2\theta} > x_1$ .

For convenience, we suppose that the eigenvalues of  $B_N$ , namely  $x_1, \dots, x_N$  are labeled in non-increasing order.

**Proof of Lemma 3.2.6 :** to show it, we make the distinction between two cases, according to whether there is a lot of mass in the vicinity of  $x_1$  or not. More precisely, for  $0 < \xi < \frac{1}{2}$ , we introduce the set

$$K_N(\xi) := \left\{ j \in \{1, \dots, N\} / x_j \in \left( x_1 - N^{-\xi}, x_1 \right] \right\}$$

and we define  $j_0$  to be the smallest element of  $\{1, \dots, N\}$  which is not in  $K_N(\xi)$ .

Let  $\delta > 0$  be fixed.

- The first case we will treat is the case of the integers  $N$  such that  $\frac{\#K_N(\xi)}{N^{1-\frac{\xi}{2}}}$  is bounded below by  $\delta$ .

In this case, the proof is very similar to the one of point 2. of Lemma 2.2.1. We make from the beginning a choice of  $\kappa$  such that

$$0 < \kappa < \frac{1}{2} - \xi. \quad (3.7)$$

Making similar computations as in the proof of Lemma 2.2.1, we get the upper bound, namely that for any  $v$  such that  $1 + 2\theta v - 2\theta x_1 > 0$ ,

$$J_N^\theta(x_1, \hat{v}_N) \leq 2 \left[ \prod_{i=1}^N \sqrt{1 + 2\theta v - 2\theta x_i} \right]^{-1} e^{N\theta v + N^{1-\kappa}|\theta|(M+|v|)} \quad (3.8)$$

To get the corresponding lower bound, that is to find a  $v$  such that

$$J_N^\theta(x_1, \hat{v}_N) \geq \frac{1}{2} \left[ \prod_{i=1}^N \sqrt{1 + 2\theta v - 2\theta x_i} \right]^{-1} e^{N\theta v - N^{1-\kappa}|\theta|(M+|v|)},$$

the point is to evaluate  $\mathbb{E}_{P_N} \left[ \left( \frac{1}{N} \|g\|^2 - 1 \right)^2 \right]$ , where  $P_N$  is the probability measure given by (2.18).

It is quite easy to check that this variance decreases fast enough : for  $i \leq j_0 - 1$ ,  $x_i \geq x_1 - N^{-\xi}$ , so that

$$\sum_{i=1}^{j_0-1} \frac{1}{v_N + \frac{1}{2\theta} - x_i} \geq \delta N^{1-\frac{\xi}{2}} \frac{1}{v_N + \frac{1}{2\theta} - x_1 + N^{-\xi}},$$

but we recall that  $v_N$  is given by the equation  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{v_N + \frac{1}{2\theta} - x_i} = 2\theta$ , where each term of the

sum is positive so that  $\sum_{i=1}^{j_0-1} \frac{1}{v_N + \frac{1}{2\theta} - x_i} \leq 2\theta N$  yielding,

$$v_N + \frac{1}{2\theta} - x_1 \geq \frac{1}{2\theta} \delta N^{-\frac{\xi}{2}} - N^{-\xi} \geq \delta N^{-\frac{\xi}{4}},$$

where the last inequality holds for  $N$  large enough. From that, we deduce that

$$\mathbb{E}_{P_N} \left[ \left( \frac{1}{N} \|g\|^2 - 1 \right)^2 \right] \leq \frac{2}{\delta^2 N^2} N^{\frac{\xi}{2}} N \leq \frac{2}{N^2} N^{\frac{\xi}{2}-1},$$

so that

$$P_N(A_N(\kappa)^c) \leq \frac{2}{\theta^2 \delta^2} N^{2\kappa + \frac{\xi}{2} - 1},$$

which is smaller than  $\frac{1}{2}$ , for  $N$  large enough by virtue of (3.7).

- We now go to the case of the integers  $N$  such that  $\#K_N(\xi) \leq \delta N^{1-\frac{\xi}{2}}$ . This time again, we get the same way the upper bound (3.8). To get the lower bound, we treat separately the eigenvalues

that are in  $K_N(\xi)$  and the other ones. We know that, for  $0 < \kappa < \frac{1}{2} - \xi$ ,

$$\begin{aligned} J_N^\theta(x_1, \tilde{\nu}_N) &\geq e^{N\theta\tilde{\nu}_N - N^{1-\kappa}|\theta|(M+|\tilde{\nu}_N|)} \mathbb{E} \left( \mathbf{1}_{A_N(\kappa)} \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^N x_i g_i^2 - \theta\tilde{\nu}_N \sum_{i=1}^N g_i^2 \right\} \right) \\ &\geq e^{N\theta\tilde{\nu}_N - N^{1-\kappa}|\theta|(M+|\tilde{\nu}_N|)} \mathbb{E} \left( \mathbf{1}_{\left| \frac{1}{N} \sum_{i=j_0}^N g_i^2 - 1 \right| \leq \frac{N-\kappa}{2}} \exp \left\{ \theta \sum_{i=j_0}^N x_i g_i^2 - \theta\tilde{\nu}_N \sum_{i=j_0}^N g_i^2 \right\} \right) \\ &\quad \mathbb{E} \left( \mathbf{1}_{\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j_0-1} g_i^2 \right| \leq \frac{N-\kappa}{2}} \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^{j_0-1} x_i g_i^2 - \theta\tilde{\nu}_N \sum_{i=1}^{j_0-1} g_i^2 \right\} \right), \quad (3.9) \end{aligned}$$

with  $\tilde{\nu}_N$  the solution of  $\frac{1}{2\theta N} \sum_{i=j_0}^N \frac{1}{\tilde{\nu}_N + \frac{1}{2\theta} - x_i} = 1$  such that  $\tilde{\nu}_N + \frac{1}{2\theta} > x_1$ .

The treatment of the first term is very similar to what was made in Lemma 2.2.1. As there, we make the change of variables  $\tilde{g}_i = \sqrt{1 + 2\theta\tilde{\nu}_N - 2\theta x_i} g_i$ , for  $j_0 \leq i \leq N$  and denote by  $\tilde{P}_N$  the new probability measure.

We can easily check that  $\mathbb{E}_{\tilde{P}_N} \left( \frac{1}{N} \sum_{i=j_0}^N g_i^2 \right) = 1$ .

Moreover, by definition of  $K_N(\xi)$ , for all  $i \geq j_0$ ,  $\tilde{\nu}_N + \frac{1}{2\theta} - x_i \geq N^{-\xi}$ , and the computation of the variance gives

$$\mathbb{E}_{\tilde{P}_N} \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{i=j_0}^N g_i^2 - 1 \right|^2 \right) \leq \frac{2}{N^2} N^{2\xi} N \leq 2N^{2\xi-1},$$

so that

$$\tilde{P}_N \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{i=j_0}^N g_i^2 - 1 \right| \geq N^{-\kappa} \right) \leq \frac{8}{\theta^2} N^{2\kappa+2\xi-1},$$

which goes to zero, as we assumed (3.7).

This gives that, for  $N$  large enough,

$$\mathbb{E} \left( \mathbf{1}_{\left| \frac{1}{N} \sum_{i=j_0}^N g_i^2 - 1 \right| \leq \frac{N-\kappa}{2}} \exp \left\{ \theta \sum_{i=j_0}^N x_i g_i^2 - \theta\tilde{\nu}_N \sum_{i=j_0}^N g_i^2 \right\} \right) \geq \frac{1}{2} \prod_{i=1}^N \left[ \sqrt{1 + 2\theta\tilde{\nu}_N - 2\theta x_i} \right]^{-1}.$$

We now go to the second expectation term in (3.9) : it is easy to check that  $\tilde{\nu}_N + \frac{1}{2\theta}$  is bounded above by  $x_1 + \frac{1}{2\theta}$ . Indeed,  $\forall i$ ,  $\tilde{\nu}_N + \frac{1}{2\theta} - x_i \geq \tilde{\nu}_N + \frac{1}{2\theta} - x_1$ , so that

$$2\theta \leq \frac{N - j_0}{N} \frac{1}{\tilde{\nu}_N + \frac{1}{2\theta} - x_1} \leq \frac{1}{\tilde{\nu}_N + \frac{1}{2\theta} - x_1} \Rightarrow \tilde{\nu}_N + \frac{1}{2\theta} \leq x_1 + \frac{1}{2\theta}.$$

Therefore, on the event  $\left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j_0-1} g_i^2 \right| \leq \frac{N-\kappa}{2} \right\}$ ,

$$\exp \left\{ \theta \left[ \sum_{i=1}^{j_0-1} (x_i - \tilde{\nu}_N) g_i^2 \right] \right\} \geq \exp \left( -\theta N^{-\xi} N^{1-\kappa} \right) \geq \exp \left( -\theta N^{1-\xi-\kappa} \right),$$

so that

$$\mathbb{E} \left( \mathbf{1}_{\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j_0-1} g_i^2 \right| \leq \frac{N^{-\kappa}}{2}} \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^{j_0-1} x_i g_i^2 - \theta \tilde{v}_N \sum_{i=1}^{j_0-1} g_i^2 \right\} \right) \geq \mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j_0-1} g_i^2 \right| \leq \frac{N^{-\kappa}}{2} \right) \cdot \exp \left( -\theta N^{1-\xi-\kappa} \right),$$

where  $\mathbb{P}$  is the standard Gaussian measure in dimension  $j_0 - 1$ .

$$\mathbb{E} \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j_0-1} g_i^2 \right|^2 \right) \leq \frac{2}{N^2} (j_0 - 1) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P} \left( \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j_0-1} g_i^2 \right| \geq \frac{N^{-\kappa}}{2} \right) \leq 4N^{2\kappa-2} N^{1-\frac{\xi}{2}},$$

so that for  $N$  large enough,

$$\mathbb{E} \left( \mathbf{1}_{\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j_0-1} g_i^2 \right| \leq \frac{N^{-\kappa}}{2}} \exp \left\{ \theta \sum_{i=1}^{j_0-1} x_i g_i^2 - \theta \tilde{v}_N \sum_{i=1}^{j_0-1} g_i^2 \right\} \right) \geq \frac{1}{2} \cdot \exp \left( -\theta N^{1-\xi-\kappa} \right).$$

From that, we get that for  $N$  large enough

$$\left| \frac{1}{N} \log J_N^\theta(x_1, \hat{v}_N) - \theta \tilde{v}_N + \frac{1}{2N} \sum_{i=j_0}^N \log(1 + 2\theta \tilde{v}_N - 2\theta x_i) \right| \leq \frac{\delta}{4}.$$

The next step is now to prove that, with  $v_N$  the solution of  $\frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^N \frac{1}{1+2\theta v_N - 2\theta x_i} = 1$  which is greater than  $x_1 - \frac{1}{2\theta}$ , we have, for  $N$  large enough,

$$\left| \theta v_N - \frac{1}{2N} \sum_{i=j_0}^N \log(1 + 2\theta v_N - 2\theta x_i) - \left( \theta \tilde{v}_N - \frac{1}{2N} \sum_{i=j_0}^N \log(1 + 2\theta \tilde{v}_N - 2\theta x_i) \right) \right| \leq \frac{\delta}{2}. \quad (3.10)$$

The first easy observation, from the definitions of  $v_N$  and  $\tilde{v}_N$  is that  $\tilde{v}_N \leq v_N$ .

We denote by  $y_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{j_0-1} \frac{1}{1+2\theta v_N - 2\theta x_i}$ . As  $\tilde{v}_N \leq x_1$  and we know that for all  $i$ ,  $|x_i| \leq M$ , it

is easy to check that there exists a constant  $C > 0$  such that  $1 - y_N \geq C$ .

After these preliminary remarks, we are now ready to go to the comparison between  $\tilde{v}_N$  and  $v_N$ .

We have that

$$\sum_{i=j_0}^N \frac{1}{v_N + \frac{1}{2\theta} - x_i} = (1 - y_N) 2\theta N \quad \text{and} \quad \sum_{i=j_0}^N \frac{1}{\tilde{v}_N + \frac{1}{2\theta} - x_i} = 2\theta N,$$

so that

$$\sum_{i=j_0}^N \left( \frac{1}{\tilde{v}_N + \frac{1}{2\theta} - x_i} - \frac{1}{v_N + \frac{1}{2\theta} - x_i} \right) = 2\theta N y_N.$$

Therefore

$$0 \leq v_N - \tilde{v}_N \leq \frac{2\theta y_N (N - j_0)}{N(1 - y_N)^2} \leq \frac{2\theta y_N}{(1 - y_N)^2} \leq \frac{2\theta}{C^2} y_N. \quad (3.11)$$

On the other side, as we already said above, we have

$$x_1 \leq \tilde{v}_N + \frac{1}{2\theta} \leq v_N + \frac{1}{2\theta},$$

so that

$$0 \leq v_N - \tilde{v}_N \leq v_N + \frac{1}{2\theta} - x_1. \quad (3.12)$$

Now, if  $v_N + \frac{1}{2\theta} - x_1 \leq \frac{\delta}{4\theta}$ , then

$$|v_N - \tilde{v}_N| \leq \frac{\delta}{4\theta}$$

by virtue of (3.12). Otherwise,

$$v_N + \frac{1}{2\theta} - x_1 \geq \frac{\delta}{4\theta} \Rightarrow v_N + \frac{1}{2\theta} - x_i \geq \frac{\delta}{4\theta},$$

so that  $y_N \leq \frac{N^{-\frac{\xi}{2}} 4\theta}{\delta}$ , so that  $|v_N - \tilde{v}_N|$  is smaller than  $\delta/4\theta$  for  $N$  large enough by virtue of (3.11). This gives immediately that

$$\begin{aligned} \left| \theta v_N - \frac{1}{2N} \sum_{i=j_0}^N \log(1 + 2\theta v_N - 2\theta x_i) - \left( \theta \tilde{v}_N - \frac{1}{2N} \sum_{i=j_0}^N \log(1 + 2\theta \tilde{v}_N - 2\theta x_i) \right) \right| \\ \leq |v_N - \tilde{v}_N| \left( \theta + \frac{1}{2N} \sum_{i=j_0}^N \frac{1}{\tilde{v}_N + \frac{1}{2\theta} - x_i} \right) \leq \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Furthermore, as  $\frac{1}{2\theta N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{1+2\theta v_N-2\theta x_i} = 1$  and each term is positive, we know that, for all  $i$ ,

$$\frac{1}{1 + 2\theta v_N - 2\theta x_i} \leq 2\theta N$$

so that

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2N} \sum_{i=1}^{j_0-1} \log(1 + 2\theta v_N - 2\theta x_i) \right| &\leq \frac{1}{2N} (j_0 - 1) \log(2\theta N) \\ &\leq \frac{\delta}{2N} N^{1-\frac{\xi}{2}} \log(2\theta N) \leq \frac{\delta}{4}, \end{aligned}$$

for  $N$  large enough, what concludes the proof of Lemma 3.2.6.

We can now go to the **proof of Lemma 3.2.5** : Let  $\delta$  be fixed,  $\theta$  be positive and  $N$  large enough. We recall that  $H_{B_N}(z) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{z-x_i}$ .

- **First case** :  $2\theta \in H_{B_N}(]x_1 + 2\delta, +\infty[) \cap H_{B'_N}(]x'_1 + 2\delta, +\infty[)$ .

In this framework, continuity has been established in Lemma 2.2.1 of chapter 2.

- **Second case** :  $2\theta \notin H_{B_N}(]x_1 + 2\delta, +\infty[)$  and  $2\theta \notin H_{B'_N}(]x'_1 + 2\delta, +\infty[)$ .

In this case,  $2\theta \notin H_{B_N}(]x_1 + 2\delta, +\infty[) \Rightarrow v_N + \frac{1}{2\theta} \in ]x_1, x_1 + 2\delta[$  and similarly  $v'_N + \frac{1}{2\theta} \in ]x'_1, x'_1 + 2\delta[$  so that

$$|v_N - v'_N| \leq 4\delta.$$

Thanks to Lemma 3.2.6, we know that it is enough to study

$$\Delta_N := \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \left( v_N + \frac{1}{2\theta} - x_i \right) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log \left( v'_N + \frac{1}{2\theta} - x'_i \right) \right|.$$

We proceed as in the proof of Lemma 5.1 in [38] and define a permutation  $\sigma_N$  that allows to put in pairs all but  $(N^{1-\kappa} \wedge N\delta)$  of the  $x_i$ 's with a corresponding  $x'_{\sigma_N(i)}$  which lies at a distance less than  $\delta$  from  $x_i$ .

As in [38], we denote by  $\mathcal{J}_0$  the set of indices  $i$  such that we have such a pairing. Then we have

$$\begin{aligned} \Delta_N &\leq \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}_0} \max \left( \frac{1}{v_N + \frac{1}{2\theta} - x_i}, \frac{1}{v'_N + \frac{1}{2\theta} - x'_{\sigma_N(i)}} \right) (|v_N - v'_N| + |x_i - x'_{\sigma_N(i)}|) \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}_0^c} \left| \log \left( v_N + \frac{1}{2\theta} - x_i \right) - \log \left( v'_N + \frac{1}{2\theta} - x'_i \right) \right| \\ &\leq \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{v_N + \frac{1}{2\theta} - x_i} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{v'_N + \frac{1}{2\theta} - x'_{\sigma_N(i)}} \right) 5\delta \\ &\quad + \frac{1}{N} \sum_{i \in \mathcal{J}_0^c} \left| \log \left( v_N + \frac{1}{2\theta} - x_i \right) - \log \left( v'_N + \frac{1}{2\theta} - x'_i \right) \right| \\ &\leq 10\theta\delta + \frac{2}{N} [N^{1-\kappa} \wedge N\delta] |\log(2N\theta)|, \end{aligned}$$

where we used once again that

$$\frac{1}{v_N + \frac{1}{2\theta} - x_i} \leq 2N\theta$$

so that we have the required continuity in this second case.

• **Third case :**  $2\theta \in H_{B_N}(]x_1 + 2\delta, +\infty[)$  and  $2\theta \notin H_{B'_N}(]x'_1 + 2\delta, +\infty[)$ .

This time again, we have to look at the quantity  $\Delta_N$  and the main question is to establish that  $v_N$  is not far from  $v'_N$ .

On one side, we have that

$$x'_1 \leq v'_N + \frac{1}{2\theta} \leq x'_1 + 2\delta. \quad (3.13)$$

As  $|x_1 - x'_1| \leq \delta$ ,  $x'_1 + 2\delta$  is greater than  $x_1$  and the map  $B_N \mapsto H_{B_N}$  is uniformly continuous outside the support of all the spectral measures so that

$$\left| H_{B'_N}(x'_1 + 2\delta) - H_{B_N}(x'_1 + 2\delta) \right| \leq C(\delta).$$

Furthermore,  $H_{B'_N}$  is decreasing on  $]x'_1, +\infty[$  so that  $H_{B'_N}(x'_1 + 2\delta) < 2\theta$ , yielding

$$H_{B_N}(x'_1 + 2\delta) \leq 2\theta + C(\delta),$$

and  $H_{B_N}$  being decreasing

$$H_{B_N}(x_1 + 3\delta) \leq 2\theta + C(\delta) = H_{B_N} \left( v_N + \frac{1}{2\theta} \right) + C(\delta),$$



what implies

$$x_1 \leq v_N + \frac{1}{2\theta} \leq x_1 + 3\delta + K(\delta)$$

and, together with (3.13) gives that

$$|v_N - v'_N| \leq 5\delta + K(\delta),$$

with  $C$  and  $K$  going to zero with  $\delta$ .

Now the same estimates as in the second case above lead to the same conclusions. This gives the continuity lemma 3.2.5. We are now ready to establish Theorem 3.2.1.

### 3.2.3 Proof of the large deviation principle for the largest eigenvalue

We already explained in Remark 3.2.4 why  $K$  is a good rate function. Now, the first step is to get exponential tightness, that is to show that we can restrict our study to the event  $\{\max_{i=1\dots N} |x_i| \leq M\}$  for  $M$  large enough because its complementary set is exponentially negligible. More precisely we have :

**Lemma 3.2.7** *There exists a function  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  going to infinity at infinity such that for all  $N$*

$$\mathbb{Q}_N^A \left( \max_{i=1\dots N} |x_i| \geq M \right) \leq e^{-Nf(M)}.$$

**Proof of lemma 3.2.7 :** To prove exponential tightness, it is more convenient to rewrite (3.1) as

$$\mathbb{Q}_N^A(dx_1, \dots, dx_N) = \frac{1}{Z_N^A} \prod_{i < j} |x_i - x_j| e^{-\frac{N}{2} \text{tr}(X_N - A_N)^2} dx_1 \dots dx_N.$$

Now, a well known inequality (see for example Lemma 2.3 in [4]) gives that

$$\text{tr}(X_N - A_N)^2 \geq \min_{\pi} \sum_{i=1}^N |x_k - a_{\pi(k)}|^2,$$

where the minimum is taken over all permutations  $\pi$  of  $\{1, \dots, N\}$ . But all  $a_k$ 's are zero, except one of them, let's say  $a_1$ , which is equal to  $\theta$ . As the law of the  $x_j$ 's is invariant by permutations, we can assume, for the permutation  $\pi_*$  for which the minimum is reached, that  $\pi_*^{-1}(1) = 1$ . Then

$$\text{tr}(X_N - A_N)^2 \geq (x_1 - \theta)^2 + \sum_{i=2}^N x_j^2.$$

Therefore, we can now use the very same estimates as in Lemma 6.3 in [7] to get Lemma 3.2.7. More precisely, we mean that we can write

$$|(x - \theta) + \theta - x_j| e^{-\frac{x_j^2}{2}} \leq e^{\frac{(x-\theta)^2}{4}},$$

for  $x$  large enough, so that, for  $M$  large enough,

$$\mathbb{Q}_N^A \left( \max_{i=1\dots N} |x_i| \geq M \right) \leq N \mathbb{Q}_N^A (|x_1| \geq M) \leq \frac{Z_{N-1}}{Z_N^A} e^{-\frac{1}{4}N(M-\theta)^2},$$

where  $Z_N$  is the normalizing constant in the Wigner case (i.e.  $A \equiv 0$ ). As it is easy to check that  $Z_N^A = Z_N$  and we know from [59] the asymptotics of  $\frac{Z_{N-1}}{Z_N}$ , this concludes the proof of Lemma 3.2.7.

We now go back to the **proof of Theorem 3.2.1**.

- The first point is to show that for all  $x < \sqrt{2}$ ,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N^A(x_N^* \leq x) = -\infty. \quad (3.14)$$

This is quite easy ; we proceed as in [7].

We know from Theorem 1.1 in [8] that the spectral measure of  $W_N$  satisfies a large deviation principle in the scale  $N^2$  with a good rate function whose unique minimizer is the semicircle law given by

$$\sigma := \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{|x| < \sqrt{2}} \sqrt{2 - x^2} dx.$$

We can check that adding a deterministic matrix of bounded rank (uniformly in  $N$ ) does not affect the spectral measure in these scales so that the spectral measure of  $X_N$  satisfies the same large deviation principle. Therefore, if we let  $x < \sqrt{2}$ ,  $f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$  such that  $f(y) = 0$  if  $y \leq x$  but  $\int f d\sigma > 0$  and if we consider the closed set  $F := \{\mu / \int f d\mu = 0\}$ , we have that

$$\mathbb{Q}_N^A(x_N^* \leq x) \leq \mathbb{Q}_N^A\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_i) = 0\right) \leq \mathbb{Q}_N^A(\hat{\mu}_N \in F),$$

where  $\hat{\mu}_N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{x_i}$  is the spectral measure of  $X_N$ . As  $\sigma \notin F$ ,

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log \mathbb{Q}_N^A(x_N^* \leq x) < 0,$$

what gives immediately (3.14).

- Let now  $x \geq \sqrt{2}$  and  $\delta > 0$ . We want to show the upper bound.

Thanks to Lemma 3.2.7, we can restrict ourselves to the event  $\{\max_{i=1 \dots N} |x_i| \leq M\}$ , for an appropriate  $M$ .

One important remark is that, by invariance by permutation, we have, for any real  $x$ ,

$$\mathbb{Q}_N^A\left(x \leq x_N^* \leq x + \delta, \max_{i=1 \dots N} |x_i| \leq M\right) \leq N \mathbb{Q}_N^A\left(x \leq x_1 \leq x + \delta, x_1 \geq \max_{i=2 \dots N} x_i, \max_{i=1 \dots N} |x_i| \leq M\right).$$

We introduce now the following notations :

- $\hat{\pi}_N := \frac{1}{N-1} \sum_{i=2}^N \delta_{x_i}$ ,

- $\mathbb{Q}_N^{N-1}$  is the measure on  $\mathbb{R}^{N-1}$  such that, for each Borelian set  $E$ , we have

$$\mathbb{Q}_N^{N-1}(\lambda \in E) = \mathbb{Q}_N^A\left(\sqrt{1 - \frac{1}{N}} \lambda \in E\right),$$

- and we recall that, for  $z \in \mathbb{R}$  and  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ,  $\Phi(z, \mu) = \int \log |z - y| d\mu(y) - \frac{1}{2} z^2$ .

With these notations, we have

$$B := \mathbb{Q}_N^A \left( x \leq x_N^* \leq x + \delta, \max_{i=1 \dots N} |x_i| \leq M \right) \\ \leq e^{-\frac{N}{2}\theta^2} \cdot \int_x^{x+\delta} dx_1 \int_{[-M, M]^{N-1}} e^{(N-1)\Phi(x_1, \hat{\pi}_N)} \cdot C_N^A \cdot I_N(X_N, A_N) \cdot d\mathbb{Q}_N^{N-1}(x_2, \dots, x_N),$$

where  $C_N^A := N \frac{Z_{N-1}^A}{Z_N^A} \cdot \left( 1 - \frac{1}{N} \right)^{\frac{N(N-1)}{4}}$ .

Let  $0 < \kappa < \frac{1}{4}$ , we have

$$B \leq C_N^A e^{-\frac{N}{2}\theta^2} \cdot \int_x^{x+\delta} dx_1 \int_{\substack{\hat{\pi}_N \in B(\sigma, N^{-\kappa}), \\ \max_{i=2 \dots N} x_i \leq x_1}} e^{(N-1)\Phi(x_1, \hat{\pi}_N)} \\ I_N(X_N, A_N) \cdot d\mathbb{Q}_N^{N-1}(x_2, \dots, x_N) + (2M)^N e^{NM|\theta|} e^{-\frac{N}{2}\theta^2} C_N^A \mathbb{Q}_N^{N-1}(\hat{\pi}_N \notin B(\sigma, N^{-\kappa})), \quad (3.15)$$

where  $B(\sigma, N^{-\kappa})$  is the ball of size  $N^{-\kappa}$  centered at  $\sigma$ , for a distance which is compatible with the weak topology on  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ , for example the Dudley distance.

We first treat the second term and show that it is exponentially negligible. We have

$$\mathbb{Q}_N^{N-1}(\hat{\pi}_N \notin B(\sigma, N^{-\kappa})) \leq \mathbb{Q}_N^{N-1}(\|F_{N-1} - F\|_\infty \geq N^{-\kappa}),$$

where  $F_{N-1}$  and  $F$  are respectively the (cumulative) distribution function of  $\hat{\pi}_N$  and  $\sigma$ . We know from the result of Bai<sup>b</sup> in [2] that

$$\|\mathbb{E}F_{N-1} - F\| = O(N^{-\frac{1}{4}}),$$

where  $\mathbb{E}$  is the expectation under  $\mathbb{Q}_N^{N-1}$ , so that

$$\mathbb{Q}_N^{N-1}(\|F_{N-1} - F\|_\infty \geq N^{-\kappa}) \leq \mathbb{Q}_N^{N-1}(\|F_{N-1} - \mathbb{E}F_{N-1}\|_\infty \geq N^{-\kappa}).$$

But, by a result of concentration of [39] (see Theorem 1.1), we have that there exists a constant  $C > 0$  such that for all  $N \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbb{Q}_N^{N-1}(\|F_{N-1} - \mathbb{E}F_{N-1}\|_\infty \geq N^{-\kappa}) \leq e^{-CN^{2-2\kappa}},$$

so that

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{Q}_N^{N-1}(\hat{\pi}_N \notin B(\sigma, N^{-\kappa})) = -\infty.$$

We can now come back to the first term in (3.15). The same computation as in [7] gives the asymptotics of  $C_N^A$  and applying Lemma 3.2.5 together with Theorem 2.1.6, we can conclude that

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{Q}_N^A \left( x \leq x_N^* \leq x + \delta, \max_{i=1 \dots N} |x_i| \leq M \right) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\theta^2 + \sup_{z \in [x, x+\delta]} [\Phi(z, \sigma) + I_\sigma(z, \theta)].$$

We already mentioned in the proof of Corollary 3.2.3 that  $z \mapsto \Phi(z, \sigma) + I_\sigma(z, \theta)$  is continuous on  $(\sqrt{2}, +\infty)$  so that in particular

$$\limsup_{\delta \downarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log \mathbb{Q}_N^A \left( x \leq x_N^* \leq x + \delta, \max_{i=1 \dots N} |x_i| \leq M \right) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\theta^2 + \Phi(x, \sigma) + I_\sigma(x, \theta).$$

---

<sup>b</sup>He shows in fact this result for  $\mathbb{Q}_N$  but it can be easily generalized to  $\mathbb{Q}_N^{N-1}$  by looking carefully at his arguments.

• We now conclude the proof of Theorem 3.2.1 by showing the corresponding lower bound. We proceed as in [7]. Let  $y > x > r > \sqrt{2}$ . Then, for any  $\delta > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{Q}_N^A(y \geq x_N^* \geq x) &\geq \mathbb{Q}_N^A\left(x_1 \in [x, y], \max_{i=2 \dots N} |x_i| \leq r\right) \\ &\geq C_N^A e^{-\frac{N}{2} \text{tr} A_N^2} \exp\left((N-1) \inf_{\substack{z \in [x, y] \\ \mu \in B_r(\sigma, N^{-\kappa})}} (\Phi(z, \mu) + I_\mu(z, \theta) - g(\delta))\right) \\ &\quad \cdot \mathbb{Q}_N^{N-1}(\hat{\nu}_N \in B_r(\sigma, N^{-\kappa})), \end{aligned}$$

where  $B_r(\sigma, N^{-\kappa}) = B(\sigma, N^{-\kappa}) \cap \mathcal{P}([-r, r])$  and  $g$  going to zero with  $\delta$  by virtue of Lemma 3.2.5. We proceed as in the upper bound to show that  $\mathbb{Q}_N^{N-1}(\hat{\nu}_N \in B_r(\sigma, N^{-\kappa}))$  is going to 1. Letting  $\delta$  going to zero and knowing the asymptotics of  $C_N^A$ , we get

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N^A(y \geq x_N^* \geq x) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \theta^2 + \inf_{z \in [x, y]} [\Phi(z, \sigma) + I_\sigma(z, \theta)].$$

We let now  $y$  decrease to  $x$ .  $\Phi(\cdot, \sigma)$  and  $I_\sigma(\cdot, \theta)$  are continuous on  $(\sqrt{2}, +\infty)$  (we are outside the support of  $\sigma$ ) so that we have the required lower bound

$$\liminf_{y \rightarrow x} \liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{Q}_N^A(x_N^* \geq x) \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \theta^2 + \Phi(x, \sigma) + I_\sigma(x, \theta).$$

This concludes the proof of Theorem 3.2.1.



## LE CHAT ET L'OISEAU

Un village écoute désolé  
Le chant d'un oiseau blessé  
C'est le seul oiseau du village  
Et c'est le seul chat du village  
Qui l'a à moitié dévoré  
Et l'oiseau cesse de chanter  
Le chat cesse de ronronner  
Et de se lécher le museau  
Et le village fait à l'oiseau  
De merveilleuses funérailles  
Et le chat qui est invité  
Marche derrière le petit cercueil de paille  
Où l'oiseau mort est allongé  
Porté par une petite fille  
Qui n'arrête pas de pleurer  
Si j'avais su que cela te fasse tant de peine  
Lui dit le chat  
Je l'aurais mangé tout entier  
Et puis je t'aurais raconté  
Que je l'avais vu s'envoler  
S'envoler jusqu'au bout du monde  
Là-bas où c'est tellement loin  
Que jamais on n'en revient  
Tu aurais eu moins de chagrin  
Simplement de la tristesse et des regrets

Il ne faut jamais faire les choses à moitié

J. PRÉVERT

# Annexe

## Considérations autour d'un problème ouvert : vers une généralisation de la loi circulaire

Comme nous l'avons vu dans l'introduction générale de cette thèse, on dispose d'une bonne compréhension de la convergence de la mesure spectrale d'une matrice aléatoire hermitienne ou symétrique réelle (cf notamment le théorème I.1.5) sous des hypothèses assez faibles sur la loi jointe des entrées, en particulier si celle-ci est de la forme  $1/z_N^V e^{-N \operatorname{tr} V(M)} dM$ , pour un potentiel  $V$  qui croît suffisamment vite à l'infini et  $dM$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{H}_N$ .

En revanche, le problème est beaucoup plus épineux si on lève l'hypothèse d'hermiticité des matrices. Le résultat le plus général dont on dispose pour l'heure est celui de Z.D. Bai [3] dans le cas où les entrées sont indépendantes et identiquement distribuées, de moyenne nulle, de variance  $1/N$  et de moments « suffisamment convergents » : la mesure spectrale converge alors vers la loi circulaire (i.e. la mesure uniforme sur le disque unité dans  $\mathbb{C}$ ), aussi appelée loi de Ginibre [30], du nom de celui qui a établi ce résultat dans le cas où la loi des entrées est en outre supposée gaussienne. La question que l'on se pose ici est celle de la généralisation de ce résultat au cas où il existe une dépendance entre les entrées, notamment lorsque leur loi jointe est de la forme  $\mathbb{P}_N^V := 1/z_N^V e^{-N \operatorname{tr} V(\Xi_N \Xi_N^*)} d\Xi_N$ , où  $d\Xi_N$  désigne la mesure de Lebesgue cette fois sur  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$ . Le spectre est alors bien sûr complexe et invariant par rotation et on trouve dans la littérature physique [27, 26, 25] une conjecture désignée usuellement sous l'appellation « Single ring theorem » qui peut s'exprimer ainsi :

**Conjecture A.0.8 (Single ring theorem)** : *Si  $V$  est un potentiel qui croît suffisamment vite à l'infini pour que la mesure spectrale empirique de  $\Xi_N$  sous la loi  $\mathbb{P}_N^V$  converge vers une mesure  $\mu_\infty$  à support compact dans  $\mathbb{C}$ , alors le support de  $\mu_\infty$  ne peut être qu'un disque ou un anneau.*

**Remarque A.0.9** *La loi  $\mathbb{P}_N^V$  étant invariante par rotation, le support de  $\mu_\infty$  ne peut être qu'un disque ou un ensemble d'anneaux concentriques. La conjecture ci-dessus affirme donc que, même si  $V$  présente plusieurs « puits de potentiel », il ne se forme qu'un seul anneau, contrairement au cas hermitien où le support peut être composé de plusieurs segments, par exemple selon le degré si  $V$  est un polynôme.*

On trouve malheureusement des lacunes assez importantes dans les démonstrations des physiciens et le but auquel je m'étais attelée au début de ma thèse était de fournir une démonstration rigoureuse et complète de cette conjecture, sous des hypothèses aussi faibles que possible sur  $V$ . Cela n'a

cependant donné lieu à aucune avancée vraiment significative et le but de cette annexe est donc simplement de présenter en détail et de façon aussi cohérente que possible le contexte, les résultats attendus, les points délicats et quelques pistes à explorer, dans l'espoir de faciliter la tâche à quiconque voudrait s'intéresser à ce joli problème.

Le plan de cette annexe est le suivant : on donne tout d'abord une description assez précise du résultat de Bai [3] et de sa stratégie de démonstration. Cette partie est notamment l'occasion de soulever les points délicats à traiter et de préciser pourquoi les méthodes « habituelles » ne peuvent s'appliquer dans ce contexte. À l'issue de cette description, on verra que l'on peut décomposer le problème en deux parties : l'étude de l'hermitisée de  $\Xi_N$  sur laquelle on fera quelques suggestions dans la partie A.2 et celle de la non accumulation de valeurs propres dans une région du plan. Ce dernier point reste le plus délicat : on n'a pas réellement de pistes tangibles à son propos mais on présentera dans la dernière partie quelques résultats sur des sujets proches qui semblent suggérer que cette propriété doit être vérifiée dans notre cas.

## A.1 La démonstration « classique » de la loi circulaire

Commençons par énoncer précisément le résultat que l'on cherche à généraliser.

**Théorème A.1.1 (Loi circulaire) :** *Soit  $\Xi_N$  une matrice  $N \times N$  d'entrées  $\xi_{kj} = 1/\sqrt{N} x_{kj}$  telles que les  $x_{kj}$  sont des variables aléatoires complexes, indépendantes, identiquement distribuées, centrées, de variance 1, de moment d'ordre 6 fini et telles que la loi jointe de leur partie réelle et de leur partie imaginaire soit de densité bornée. Alors, presque sûrement, la mesure spectrale empirique (dite aussi mesure de Brown)  $\hat{\mu}^N$  de  $\Xi_N$  tend faiblement vers la loi circulaire, c'est-à-dire vers la mesure uniforme sur le disque unité dans  $\mathbb{C}$ .*

Le but de cette partie est de donner une idée assez précise de la stratégie de démonstration utilisée par Bai dans l'article éponyme [3] dans lequel il montre la loi circulaire. Avant d'examiner le cheminement qu'il choisit d'adopter, nous tenons à faire quelques remarques sur l'échec des techniques « habituelles » à traiter du cas non hermitien.

### A.1.1 L'échec des techniques classiques

Le lecteur qui ne serait pas familier avec ces techniques « classiques » peut par exemple se reporter à l'article de revue [4] du même auteur.

En dehors des cas où on connaît explicitement la loi jointe des valeurs propres, on peut recenser au moins trois techniques qui permettent d'obtenir la convergence de la mesure spectrale empirique, disons dans le cas hermitien. Nous allons rapidement les passer en revue toutes trois.

- La première idée (développée par les pionniers E. P. Wigner [80] ou L. Arnold [1]) est d'examiner la convergence des moments de la mesure spectrale empirique. Si  $(X_N)_{N \geq 1}$  est la suite de matrices aléatoires considérée, ceux-ci se réexpriment bien sûr sous la forme  $\mathbb{E}[\text{tr} X_N^k]$ . On peut montrer qu'ils convergent vers ceux de la loi semi-circulaire (c'est-à-dire les nombres de Catalan). Il ne reste alors plus qu'à montrer la tension (par exemple dans [4] sous la forme du critère de Carleman) pour obtenir qu'essentiellement tout se passe sur un compact et que par conséquent la convergence des moments suffit pour obtenir la convergence faible des mesures. Dans le cas complexe, cette approche est inopérante puisque les moments ne suffisent plus à



caractériser une loi : on n'a plus de théorème simple d'approximation uniforme des fonctions continues par des polynômes.

- Si l'on n'est pas amateur de la combinatoire des moments, une approche alternative est d'étudier la transformée de Hilbert de la mesure spectrale, c'est-à-dire d'examiner  $G_N(z) = \mathbb{E}[\text{tr}(z - X_N)^{-1}]$ . Là encore, on montre que  $G_N$  converge simplement (au moins pour  $z$  suffisamment loin du support de la loi semi-circulaire). On obtient même une équation pour la fonction limite  $G$  qui permet de conclure qu'elle est bien la transformée de Hilbert de la loi semi-circulaire. Et on peut alors conclure puisqu'on sait que  $G$  caractérise la loi dont elle provient (on dispose même d'une formule d'inversion explicite, donnée par l'équation (3.2) de [4]).

Or, si cette propriété est vraie pour les mesures à support dans  $\mathbb{R}$ , elle ne l'est plus dans  $\mathbb{C}$ . Il suffit pour s'en convaincre de constater que les transformées de Hilbert respectives de la mesure ponctuelle  $\delta_0$  et de la mesure uniforme sur le disque unité coïncident en dehors de ce disque (autrement dit la transformée de Hilbert « ne voit pas » ce qui se passe à l'intérieur du support).

- Enfin une troisième approche — moins classique parce que plus récente mais qui s'est révélée un outil puissant — est celle du calcul stochastique. Cette technique, introduite notamment dans [14] et dont on peut trouver une présentation dans [35], ne s'applique qu'à certains types de loi. Par exemple, dans le cas de matrices gaussiennes, on choisit de les considérer comme la valeur au temps 1 d'un processus brownien  $(W_N(t))_{t \geq 0}$  à valeurs dans les matrices hermitiennes. On applique ensuite la formule d'Itô à des quantités telles que  $\text{tr}f(W_N(t))$  pour des fonctions-tests  $f$  suffisamment régulières. Par chance, ce calcul stochastique est fermé (tous les termes se réexpriment comme des traces de fonctions de  $W_N(t)$ ) ; en prenant l'espérance la partie martingale disparaît et on obtient la convergence ainsi qu'une équation pour la limite. Mais là encore, on est confrontés au même type de problèmes qu'avec les stratégies précédentes : pour caractériser les lois, il faudrait regarder des fonctions à la fois du processus brownien complexe et de son adjoint et le calcul stochastique correspondant n'est plus fermé.

### A.1.2 Décomposition du problème ; méthode d'hermitisation

Voyons maintenant comment Bai a réussi à pallier ces problèmes. Il choisit d'utiliser un lemme qu'il attribue à Girko ([31]) et qui consiste en la formule suivante :

**Lemme A.1.2** *Pour tout  $(u, v) \in \mathbb{C}^2$  tel que  $uv \neq 0$ , on a :*

$$\begin{aligned} g_N(u, v) &:= \iint \exp(iux + ivy) \hat{\mu}^N(dx, dy) \\ &= \frac{u^2 + v^2}{4iu\pi} \iint \frac{\partial}{\partial a} \left[ \int_0^\infty \log x \hat{\nu}_N^{(z)}(dx) \right] \exp(iua + ivb) dadb, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

où  $z = a + ib$  et  $\hat{\nu}_N^{(z)}$  est la mesure spectrale empirique de la matrice  $H_N(z) = (\Xi_N - zI_N)^*(\Xi_N - zI_N)$ , que nous appellerons dans la suite l'hermitisée de  $\Xi_N$ <sup>a</sup>.

<sup>a</sup>De manière équivalente, on a, au sens des distributions, l'égalité suivante (cf par exemple [69])  $\hat{\mu}^N = \frac{1}{2\pi N} \left( \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \right) \log \det((\Xi_N - zI_N)^*(\Xi_N - zI_N))$ , avec encore une fois  $z = a + ib$ .

Ce lemme permet notamment à l'auteur de décomposer le problème de la convergence de  $\hat{\mu}^N$  en deux questions distinctes :

1. l'étude de la convergence de la mesure spectrale  $\hat{\nu}_N^{(z)}$  de l'hermitisée. Cette dernière étant hermitienne, il a à sa disposition les techniques classiques et il choisit d'étudier la transformée de Hilbert,
2. le passage à la limite de la relation ci-dessus, qui se ramènera principalement, comme nous allons le voir plus loin, au contrôle de l'intégrale du logarithme près de zéro (cf Lemme A.1.5).

La première étape est la partie « agréable » de la preuve. Nous ne la détaillerons pas plus avant. Z.D. Bai montre que  $\hat{\nu}_N^{(z)}$  a une limite faible, qu'il arrive à caractériser assez précisément pour faire de la loi circulaire le candidat pour la limite de  $\hat{\mu}^N$ . Notons au passage qu'il obtient même la convergence uniforme de  $\hat{\nu}_N^{(z)}$  vers sa limite  $\nu^{(z)}$  sous la forme du lemme suivant

**Lemme A.1.3**

$$\sup_{z \in T} \|\hat{\nu}_N^{(z)} - \nu^{(z)}\| = o(n^{-\frac{1}{120}}),$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme en variation totale pour les fonctions de répartition et  $T$  est un anneau centré en 0 et dont la taille est bornée uniformément en  $N$ <sup>b</sup>.

Mais revenons plutôt sur la deuxième étape, beaucoup plus difficile à franchir.

### A.1.3 De la convergence de l'hermitisée à celle de la mesure de Brown

Pour convaincre le lecteur que celle-ci est vraiment le point délicat de l'affaire, commençons par citer le contre-exemple suivant, tiré de l'article [69] :

**Contre-Exemple A.1.4** *La continuité de la mesure de Brown dans la topologie donnée par la convergence des moments (donc celle de la mesure spectrale de l'hermitisée) n'est pas vérifiée en général : si on définit la suite de matrices de taille  $N \times N$*

$$\Xi_N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

*ses moments convergent vers ceux d'un élément dit « Haar unitaire » (i.e. dont tous les moments sont nuls sauf celui d'ordre 0 qui vaut 1), dont la mesure de Brown est la mesure uniforme sur le cercle unité alors que les mesures de Brown de tous les  $\Xi_N$  sont des masses de Dirac en 0.*

Pour s'assurer que dans notre cas il y a bien continuité de la mesure de Brown, deux ingrédients sont nécessaires : l'uniformité de la convergence des  $\hat{\nu}_N^{(z)}$  vers  $\nu^{(z)}$ , donnée par le lemme A.1.3 et le contrôle de l'intégrale du logarithme près de zéro.

En effet, pour montrer que la relation (A.1) passe à la limite, il nous faut examiner la quantité

$$A_N(z) := \int_0^\infty \log x \left[ \hat{\nu}_N^{(z)} - \nu^{(z)} \right] (dx) \tag{A.2}$$

---

<sup>b</sup>Par des arguments de tension, il est assez facile de montrer que pour  $N$  assez grand, on peut se limiter à regarder  $z$  dans  $T$ .

et montrer qu'elle tend vers zéro, uniformément en  $z$ .

On réécrit  $A_N(z)$  comme

$$A_N(z) = \int_0^{\varepsilon_N} \log x \left[ \hat{\nu}_N^{(z)} - \nu^{(z)} \right] (dx) + \int_{\varepsilon_N}^{\infty} \log x \left[ \hat{\nu}_N^{(z)} - \nu^{(z)} \right] (dx),$$

avec  $\varepsilon_N = \exp(n^{-\frac{1}{120}})$  et le lemme A.1.3 nous donne alors la convergence vers zéro de

$$\int_{z \in T} \int_{\varepsilon_N}^{\infty} \log x \left[ \hat{\nu}_N^{(z)} - \nu^{(z)} \right] (dx).$$

Il reste alors à montrer que

**Lemme A.1.5**

$$\int_{z \in T} \int_0^{\varepsilon_N} \log x \hat{\nu}_N^{(z)}(dx) dadb \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0,$$

si  $z = a + ib$  et  $\varepsilon_N = \exp(n^{-\frac{1}{120}})$ ,

puisqu'il est facile de vérifier que ceci est vrai pour  $\nu^{(z)}$ , par exemple en arguant que les  $\nu^{(z)}$  ont une densité bornée. Cela revient en fait à s'assurer que  $\hat{\mu}^N$  ne peut charger de manière trop importante aucune zone du plan.

Le reste de ce paragraphe sera consacré à la **démonstration du lemme A.1.5**, qui est le point crucial dont la généralisation pose problème. Nous soulignerons notamment dans cette démonstration comment l'auteur fait un usage habile de l'indépendance des entrées. Comme pour l'étude de la convergence de  $\hat{\nu}_N^{(z)}$ , que nous n'avons pas décrite en détail, la stratégie va consister à comparer ce qui se passe en dimension  $N$  à ce qui se passe en dimension plus petite en isolant des vecteurs-colonnes. Ici, ce n'est pas un mais deux vecteurs qui seront mis à part, pour des raisons que nous ne tarderons pas à justifier un peu plus bas. On écrit donc  $\Xi_N - zI_N = (Z_1|Z)$  avec  $Z_1 = (r_1 r_2)$  ses deux premiers vecteurs-colonnes.

On note  $(\Lambda_k)_{1 \leq k \leq N}$  les valeurs propres de  $H_N(z) = (\Xi_N - zI_N)^*(\Xi_N - zI_N)$ , rangées en ordre croissant et  $(\eta_k)_{1 \leq k \leq N-2}$  celles de  $Z^*Z$ , également ordonnées. Le calcul du déterminant de  $H_N(z)$  en tenant compte de cette décomposition permet d'obtenir

$$\sum_{k=1}^N \log \Lambda_k = \sum_{k=1}^{N-2} \log \eta_k + \log(\det(Z_1^* Q Z_1)),$$

avec  $Q = I_N - Z(Z^*Z)^{-1}Z^*$ .

Comme on sait de plus que  $\forall k \leq N-2$ ,  $\Lambda_k \leq \eta_k \leq \Lambda_{k+2}$ , on peut en déduire que

$$\begin{aligned} \int_0^{\varepsilon_N} \log x \hat{\nu}_N^{(z)}(dx) &= \frac{1}{N} \sum_{\Lambda_k < \varepsilon_N} \log \Lambda_k \\ &\geq \frac{1}{N} \min\{\log(\det(Z_1^* Q Z_1)), 0\} + \frac{1}{N} \sum_{\eta_k < \varepsilon_N} \log \eta_k - \frac{2}{N} \log(\max(\Lambda_N, 1)). \end{aligned}$$

Le dernier terme provient du fait que, si  $l$  est le premier indice pour lequel  $\eta_l \geq \varepsilon_N$  alors  $\Lambda_{l-1} < \varepsilon_N$  et  $\Lambda_{l+2} > \varepsilon_N$  : on peut donc oublier dans la somme au plus deux valeurs propres  $\Lambda_k$  qui contribuent

au plus comme  $2 \log \Lambda_{max}$ . D'ailleurs, ce dernier terme ne pose aucun problème : il tend vers zéro puisqu'on sait que, presque sûrement

$$\Lambda_N \leq (\|\Xi_N + |z|\|)^2 \leq (\|2 + |z|\|)^2.$$

L'examen du deuxième terme va nous permettre de comprendre pourquoi on a choisi d'isoler deux vecteurs-colonnes  $r_1$  et  $r_2$ . En effet, on utilise la croissance près de zéro de la fonction  $x \mapsto x \log x$  pour écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \left| \sum_{\eta_k < \varepsilon_N} \log \eta_k \right| &\leq N^{-\frac{119}{120}} \varepsilon_N \sum_{k=1}^{N-2} \frac{1}{\eta_k} = N^{-\frac{119}{120}} \varepsilon_N \text{tr}((Z^*Z)^{-1}) \\ &\leq N^{-\frac{119}{120}} \varepsilon_N \sum_{k=3}^N [(Z^*Z)^{-1}]_{kk} \leq N^{-\frac{119}{120}} \varepsilon_N \sum_{k=3}^N \frac{1}{r_k^* Q_k r_k}, \end{aligned}$$

avec  $Q_k$  le projecteur sur le sous-espace de dimension 3 orthogonal à  $r_3, \dots, r_{k-1}, r_{k+1}, \dots, r_N$ , où les  $r_j$  sont les vecteurs-colonnes de  $\Xi_N - zI_N$ .

On réécrit alors  $Q_k = \gamma_{k1}\gamma_{k1}^* + \gamma_{k2}\gamma_{k2}^* + \gamma_{k3}\gamma_{k3}^*$  avec  $\gamma_{kj}$  des vecteurs unitaires dans  $\mathbb{R}^N$ .

Le point important (où intervient de manière cruciale l'hypothèse d'indépendance des entrées) est que la loi jointe conditionnelle de  $(r_k^*\gamma_{k1}, r_k^*\gamma_{k2}, r_k^*\gamma_{k3})$  sachant les  $\gamma_{kj}$  est de densité bornée polynomialement en  $N$ . En effet, l'auteur avance l'argument suivant : comme  $\sqrt{N}r_1, \sqrt{N}r_2$  et  $\sqrt{N}r_k$  sont indépendants les uns des autres et indépendants de  $\gamma_{k1}, \gamma_{k2}$  et  $\gamma_{k3}$  (qui ne dépendent que des vecteurs-colonnes autres que  $r_1, r_2$  et  $r_k$ ) et de densité bornée, alors la loi jointe de  $(\sqrt{N}r_k^*\gamma_{k1}, \sqrt{N}r_k^*\gamma_{k2}, \sqrt{N}r_k^*\gamma_{k3})$  sachant les  $\gamma_{kj}$  est de densité bornée de sorte que celle de  $(r_k^*\gamma_{k1}, r_k^*\gamma_{k2}, r_k^*\gamma_{k3})$  sachant les  $\gamma_{kj}$  est au plus polynomiale en  $N$ .

Cela permet d'obtenir que

$$\sum_{N \in \mathbb{N}^*} N^{-\frac{119}{120}} \varepsilon_N \sum_{k=3}^N \int_{z \in T} \mathbb{E} \left( \frac{1}{|r_k^*\gamma_{k1}|^2 + |r_k^*\gamma_{k2}|^2 + |r_k^*\gamma_{k3}|^2} \right) dadb < \infty,$$

en utilisant que  $\frac{1}{\|\cdot\|^2}$  est intégrable au voisinage de zéro dans  $\mathbb{R}^6$  (mais pas dans  $\mathbb{R}^4$ , d'où la nécessité d'isoler  $r_1$  et  $r_2$ ).

Le raisonnement pour traiter le premier terme  $\frac{1}{N} \log(\det(Z_1^* Q Z_1))$  où on rappelle que  $Q = I_N - Z(Z^*Z)^{-1}Z^*$  est très similaire. Avec probabilité 1,  $Q$  est de rang 2 et peut donc s'écrire  $Q = \gamma_1\gamma_1^* + \gamma_2\gamma_2^*$  pour deux vecteurs unitaires  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ . Un petit calcul donne

$$\frac{1}{N} \log(\det(Z_1^* Q Z_1)) = \frac{1}{N} \log (|\gamma_1^* r_1 \gamma_2^* r_2 - \gamma_2^* r_1 \gamma_1^* r_2|^2).$$

Le travail consiste alors à montrer que  $|\gamma_1^* r_1 \gamma_2^* r_2 - \gamma_2^* r_1 \gamma_1^* r_2|$  a une probabilité très faible d'être trop petit et pour montrer cela, on utilise que la loi de  $\gamma_1^* r_1, \gamma_2^* r_2, \gamma_1^* r_2, \gamma_2^* r_1$  conditionnellement à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  est au plus polynomiale en  $N$ , pour les mêmes raisons que celles invoquées plus haut.

Dans le cas où les entrées ne sont plus indépendantes — ce qui est en particulier le cas sous une mesure proportionnelle à  $e^{-V(\Xi_N \Xi_N^*)} d\Xi_N$  — ce dernier argument s'effondre et malgré nos efforts nous n'avons pu obtenir de résultats intéressants sur la loi jointe des  $\gamma_i^* r_j$  conditionnellement à  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ni proposer de stratégie alternative.

Nous espérons en particulier montrer que l'invariance par rotation de la loi assurait un mélange suffisant pour éviter l'accumulation de valeurs propres de  $\Xi_N$  autour d'une valeur de  $z$ , qui peut causer l'explosion du logarithme mais ce fut malheureusement sans succès. Nous précisons cependant dans la troisième partie du présent chapitre pourquoi il est raisonnable de penser qu'une telle accumulation n'a jamais lieu dès que la loi de départ est « suffisamment aléatoire », dans un sens qui reste bien sûr à définir (cf. en particulier le théorème A.3.1).

## A.2 Entropie pour des matrices de Wishart non centrées

Comme nous l'avons évoqué au début de la partie précédente, toutes les approches « classiques » semblent échouer dans le cas où le spectre est complexe et il apparaît indispensable de travailler non pas directement sur la mesure spectrale de  $\Xi_N$  mais sur celle, que l'on continue à noter  $\hat{\nu}_N^{(z)}$ , de son hermitisée

$$H_N(z) = (\Xi_N - zI_N)(\Xi_N - zI_N)^*. \quad (\text{A.3})$$

Le but de cette partie est de suggérer une approche par les grandes déviations pour l'étude de la convergence de  $\hat{\nu}_N^{(z)}$  sous la mesure  $1/Z_N^V e^{-N\text{tr}V(\Xi_N \Xi_N^*)} d\Xi_N$  (avec  $Z_N^V$  une constante de normalisation et  $d\Xi_N$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})^c$ ).

### A.2.1 Présentation du problème et contexte

Au sens strict, une matrice de Wishart  $H_N$  est une matrice qui s'écrit  $T_N T_N^*$ , avec  $T_N$  une matrice aléatoire de taille  $p(N) \times N$  telles que toutes ses entrées soient indépendantes et de loi normale, centrée, de variance  $1/N$ . La loi jointe des valeurs propres de  $H_N$  est alors de la forme

$$\frac{1}{z_N} \exp\left(-\frac{N}{2} \sum_{i=1}^{p(N)} \lambda_i\right) \prod_{i=1}^{p(N)} \lambda_i^{\frac{p(N)-N+1}{2}} \prod_{i < j} |\lambda_i - \lambda_j| \prod_{i=1}^{p(N)} d\lambda_i.$$

Mais, par abus de langage, le terme de « matrice de Wishart » (ou « Wishart généralisée ») désigne une classe bien plus large de matrices symétriques positives qui s'écrivent  $R_N R_N^*$  pour des matrices aléatoires  $R_N$  ayant des lois faciles à décrire.

Pour ces matrices de Wishart généralisées, on dispose d'un résultat de grandes déviations qui s'énonce de la façon suivante (on peut trouver ce théorème dans [44] et la preuve suit le même schéma que celle du résultat analogue pour les matrices de Wigner établi dans [8]) :

**Théorème A.2.1** *Soit  $Q : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp(-\varepsilon Q(x)) = 0$ .*

*On suppose que la loi jointe des valeurs propres de  $T_N T_N^*$  est de la forme*

$$\frac{1}{z'_N} \exp\left(-N \sum_{i=1}^{m(N)} Q(t_i)\right) \prod_{i=1}^{m(N)} t_i^{\gamma(N)} \prod_{1 \leq i < j \leq m(N)} |t_i - t_j|^{2\beta} \prod_{i=1}^{m(N)} dt_i.$$

*avec  $\beta > 0$  fixé,  $\frac{m(N)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \alpha$  et  $\frac{\gamma(N)}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \gamma \geq 0$ . Alors  $B := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log z'_N$  existe et la loi de  $\hat{\nu}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{t_i}$  satisfait un principe de grandes déviations, dans l'échelle  $N^2$ , de bonne*

---

<sup>c</sup>Dans [3], Bai considérait des entrées complexes; dans la première partie de ce chapitre nous avons gardé ses notations mais dans la suite nous préférons considérer des entrées réelles, ce qui ne change rien au problème mais allège un peu les notations.

fonction de taux

$$I(\mu) = -\alpha^2 \beta \Sigma(\mu) + \alpha \int (Q(x) - \gamma \log x) d\mu(x)$$

pour  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$ , avec  $\Sigma(\mu) = \iint \log |x - y| d\mu(x) d\mu(y)$ .

De plus, il existe une unique mesure  $\mu_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$  telle que  $I(\mu_0) = 0$  (et par conséquent  $\hat{\nu}_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mu_0$ ).

Dans le cas qui nous intéresse, si le potentiel  $V$  satisfait la condition  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \exp(-\varepsilon Q(x)) = 0$ , alors la loi jointe des valeurs propres de la matrice  $H_N(0)$ , définie plus haut par (A.3) rentre dans le cadre du théorème ci-dessus ; la loi de  $\hat{\nu}_N^{(0)}$  vérifie donc un PGD.

Cependant, dès que  $z \neq 0$ , on sort du champ d'application de ce résultat et le travail va consister à montrer qu'on peut tout de même obtenir un PGD — ou du moins une borne supérieure — avec des propriétés additionnelles permettant d'en déduire la convergence faible. Pour cela, l'idée est d'appliquer une méthode qui semble mieux adaptée au problème : l'approche dynamique.

Celle-ci a été introduite dans [14] et nous l'avons brièvement évoquée plus haut : rappelons que l'idée directrice est de voir les matrices aléatoires que l'on veut étudier comme les valeurs au temps 1 d'un processus. Comme on s'en doute, cela est particulièrement adapté au cas gaussien puisque le processus associé est simplement le mouvement brownien. Ici, on va donc naturellement s'intéresser au processus  $W_N(t) = B_N(t)B_N(t)^*$ , où  $B_N(t)$  est une matrice  $N \times N$  à entrées browniennes indépendantes. À l'aide d'un calcul stochastique adapté au contexte matriciel, il a été montré dans [14] le résultat suivant :

**Théorème A.2.2** *Si on désigne par  $\hat{\mu}^N$  le processus défini sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$  tel que, pour toute  $f \in \mathcal{C}_b^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, 1])^d$  et  $t \in [0, 1]$ ,  $\hat{\mu}_t^N(f) = \frac{1}{N} \text{tr} f(W_N(t))$ , alors  $\hat{\mu}^N$  satisfait une borne supérieure de grandes déviations, dans l'échelle  $N^2$ , de bonne fonction de taux  $S^{\delta_0}$  définie sur l'ensemble des processus de  $[0, 1]$  à valeurs dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$  par,*

$$S^\mu(\nu) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } \nu_0 \neq \mu, \\ S^{0,1}(\nu), & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $S^{s,t}(\nu) = \sup_{f \in \tilde{\mathcal{C}}_b^{2,1}(\mathbb{R} \times [0,1])} \left\{ S^{s,t}(\nu, f) - \frac{1}{2} \langle f, f \rangle_\nu^{s,t} \right\}$ , avec

$$\begin{aligned} S^{s,t}(\nu, f) &= \int f(x, t) d\nu_t(x) - \int f(x, s) d\nu_s(x) \\ &\quad - \int_s^t \int (\partial_u f(x, u) + \partial_x f(x, u)) d\nu_u(x) du \\ &\quad - \int_s^t \iint \left( \frac{x+y}{2} \right) \left( \frac{\partial_x f(x, u) - \partial_x f(y, u)}{x-y} \right) d\nu_u(x) d\nu_u(y) du, \\ \langle f, g \rangle_\nu^{s,t} &= 2 \int_s^t \int x \partial_x f(x, u) \partial_x g(x, u) d\nu_u(x) du, \end{aligned}$$

et  $\tilde{\mathcal{C}}_b^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, 1])$  est le sous-espace des fonctions de  $\mathcal{C}_b^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, 1])$  telles que  $\langle f, f \rangle_\nu^{s,t}$  soit borné uniformément en  $\nu$ .

---

<sup>d</sup> $\mathcal{C}_b^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, 1])$  désigne l'ensemble des fonctions bornées sur  $\mathbb{R} \times [0, 1]$  continûment dérivables en la variable de temps et deux fois continûment dérivables en la variable d'espace.

Comme la marginale au temps 1 du processus, c'est-à-dire l'application  $\hat{\mu}_1^N \mapsto \hat{\mu}_1^N$ , est continue, le principe de contraction nous donne que la loi de la mesure spectrale de  $W_N(1) = H_N(0)$  (qui est une matrice de Wishart au sens strict) vérifie une borne supérieure de grandes déviations de fonction de taux

$$J^{\delta_0}(\mu) = \inf\{S^{\delta_0}(\nu); \nu_1 = \mu\}.$$

Notons d'ailleurs que cette approche est particulièrement bien adaptée pour traiter le cas non centré ( $z \neq 0$ ) puisqu'on peut montrer qu'on a exactement les mêmes résultats que ci-dessus mais en remplaçant  $S^{\delta_0}$  par  $S^{\delta_z}$  (on obtient ledit résultat en effectuant le calcul stochastique sur un mouvement brownien partant non pas de zéro mais de  $zI_N$  : cela nous donne exactement les mêmes équations et n'affecte que leurs conditions initiales).

Mais rappelons que ce n'est pas le cas où  $\Xi_N$  est gaussienne qui nous intéresse mais celui où elle est de loi  $\mathbb{P}_N^V$ . Dans le cas par exemple où  $V$  est borné (ou bien satisfait de bonnes propriétés d'intégrabilité exponentielle), on peut appliquer le lemme de Varadhan pour obtenir que la loi de  $\hat{\nu}_N^{(z)}$  sous  $\mathbb{P}_N^V$  satisfait une borne supérieure de grandes déviations de fonction de taux  $K(\mu) := J^{\delta_z}(\mu) + \int V(x)d\mu(x) + B'$ , où  $B' := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \log Z_N^V$ .

Comme nous l'avons dit plus haut, notre but est de montrer la convergence faible de la mesure  $\hat{\nu}_N^{(z)}$ ; pour cela, il faut nous assurer d'une part que la fonction de taux  $K$  possède un unique minimum  $\mu_0$  et que, pour ce minimiseur  $\mu_0$ , on a  $K(\mu_0) = 0$ .

D'après le Théorème A.2.1,  $B'$  coïncide avec  $B$  pour  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$  et  $Q = V$ . Montrer que  $K(\mu_0) = 0$  revient donc à comparer les fonctions de taux  $I$  et  $J$ . Un problème très similaire a été traité dans [15] dans le cas de matrices browniennes hermitiennes. Nous allons expliquer ci-après comment on peut espérer généraliser ces résultats (notamment les théorèmes 4.1 et 4.2 de [15]).

## A.2.2 Réduction de l'entropie par $W$ -convolution libre

Comparer les fonctions de taux  $I$  et  $J^{\delta_z}$  signifie essentiellement pour nous identifier leur minimum — et donc aussi comprendre leurs minimiseurs. Pour cela un point crucial est de montrer que l'entropie  $S^\mu$  peut être réduite par une opération de convolution appropriée. Dans le cas du mouvement brownien hermitien, le théorème 4.1 de [15] affirme que l'entropie est réduite par convolution libre. Dans le cas des processus de Wishart  $W_N(t)$ , une conjecture raisonnable — que nous n'avons cependant pas réussi à montrer complètement — est que l'entropie est réduite par une opération que nous qualifierons de  $W$ -convolution libre. Afin de la définir proprement, il convient d'introduire quelques notations, concernant notamment les éléments dits  $R$ -diagonaux.

Mais avant de pouvoir parler de ceux-ci, il nous faut généraliser la notion de  $R$ -transformée, que nous avons présentée dans l'introduction générale de cette thèse et qui a été centrale dans le chapitre 2, au cas de plusieurs variables. Pour cela, il faut utiliser non pas son expression analytique à partir de la transformée de Hilbert comme nous l'avons fait jusqu'à présent mais plutôt celle sous forme de série ayant pour coefficients les cumulants. Définissons tout de suite tous ces objets :

**Définition A.2.3** Soit  $(\mathcal{A}, \varphi)$  un espace de probabilités libres et  $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathcal{A}, \varphi)$  un  $n$ -uplet de variables aléatoires. On définit les cumulants  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de la loi jointe de  $(a_1, \dots, a_n)$  comme les éléments de  $\mathbb{C}$  vérifiant

$$\varphi(a_1 \dots a_n) = \sum_{\pi \in NC(n)} c_{n;\pi}[a_1, \dots, a_n],$$

où  $\pi$  est un élément de  $NC(n)$  l'ensemble des partitions non croisées<sup>e</sup> de  $\{1, \dots, n\}$ , formé des blocs  $V_1, \dots, V_r$ , avec  $V_i = \{a_{i,1}, \dots, a_{i,|V_i|}\}$ , de sorte que

$$c_{n,\pi}[a_1, \dots, a_n] = \prod_{i=1}^r c_{|V_i|}[a_{i,1}, \dots, a_{i,|V_i|}].$$

La  $R$ -transformée de la loi  $\mu_{(a_1, \dots, a_n)}$  du  $n$ -uplet  $(a_1, \dots, a_n)$  est alors donnée comme la série à  $n$  variables non commutatives

$$R_{\mu_{(a_1, \dots, a_n)}}(z_1, \dots, z_n) := \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n c_n[a_{i_1}, \dots, a_{i_k}].$$

Les éléments dits  $R$ -diagonaux sont des variables aléatoires dont la  $R$ -transformée possède une forme particulière. Plus précisément :

**Définition A.2.4** Soit  $(\mathcal{A}, \varphi)$  un espace de probabilités libres et  $a_1$  et  $a_2$  deux éléments de  $\mathcal{A}$ . On dit que la paire  $(a_1, a_2)$  est  $R$ -diagonale ssi il existe une suite de réels  $(\beta_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  telle que

$$R_{\mu_{a_1, a_2}}(z_1, z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \left[ (z_1 z_2)^k + (z_2 z_1)^k \right],$$

où  $R_{\mu_{a_1, a_2}}$  est la  $R$ -transformée de la loi jointe de  $(a_1, a_2)$ .

Dans ce cas,  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^k$  est appelée série déterminante pour la paire  $(a_1, a_2)$ .

Un élément  $a$  est dit  $R$ -diagonal si la paire  $(a, a^*)$  l'est au sens que nous venons de définir.

On peut en particulier vérifier (cf. par exemple [62]) que si  $a$  est  $R$ -diagonal, il a la même distribution que le produit  $uh$ , où  $u$  est un élément Haar unitaire et  $h$  un élément positif ayant même loi que  $|a| := (aa^*)^{\frac{1}{2}}$ , libre avec  $u$ . On rappelle à ce propos qu'un élément Haar unitaire  $u$  est tel que la  $R$ -transformée de sa loi soit donnée par

$$R_{\mu_{u, u^*}}(z_1, z_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (2k-2)!}{k!(k-1)!} \left[ (z_1 z_2)^k + (z_2 z_1)^k \right] := M\ddot{o}b(z_1, z_2). \quad (\text{A.4})$$

On en déduit en particulier que tout élément positif peut s'écrire  $XX^*$  avec  $X$  un élément  $R$ -diagonal.

Rappelons maintenant que si  $a$  et  $b$  sont deux éléments de  $\mathcal{A}$ , libres entre eux, de lois respectives  $\mu_a$  et  $\mu_b$  alors la loi de  $a + b$  est le produit de convolution de leur loi, noté  $\mu_a \boxplus \mu_b$ . On peut vérifier que même dans le cas à plusieurs variables, la  $R$ -transformée linéarise la convolution libre.

Une autre notion de convolution d'une certaine manière plus naturelle pour les éléments positifs — et que nous appellerons  $W$ -convolution — est la suivante :

**Définition A.2.5** Soit  $Z$  un élément positif de loi  $\mu_Z$  qui s'écrit  $XX^*$ , avec  $X$   $R$ -diagonal. Soit  $A$  un autre élément  $R$ -diagonal, libre avec  $X$ , tel que l'élément positif  $AA^*$  soit de loi  $\mu_{AA^*}$ . Alors la  $W$ -convolution<sup>f</sup> de  $\mu_Z$  par  $\mu_{AA^*}$ , notée  $\mu_Z \boxplus_W \mu_{AA^*}$ , est la loi de  $(X + A)(X + A)^*$ .

<sup>e</sup>Une partition de  $\{1, \dots, n\}$  est dite non croisée si on ne peut trouver de quadruplet  $(p_1, p_2, q_1, q_2)$  tel que  $1 \leq p_1 < q_1 < p_2 < q_2 \leq n$  tel que  $p_1$  est dans le même bloc que  $p_2$ ,  $q_1$  est dans le même bloc que  $q_2$  mais  $p_2$  n'est pas dans le même bloc que  $q_1$ .

<sup>f</sup>Notons que cette convolution est bien définie puisque si on décompose  $Z$  d'une manière différente en  $YY^*$  avec  $Y$   $R$ -diagonal, alors  $Y$  aura même loi que  $X$ .



Le résultat attendu s'énonce donc de la manière suivante :

**Conjecture A.2.6** *Si  $S$  est la fonction de taux définie dans le théorème A.2.2 et  $\pi$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}^+$ , alors pour tout  $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^+)$  et tout  $\nu$  tel que  $S^\mu(\nu) < \infty$ ,*

$$S^{\pi \boxplus_W \mu}(\pi \boxplus_W \nu) \leq S^\mu(\nu).$$

Donnons maintenant quelques éléments sur une stratégie possible de preuve. Elle s'inspire directement de celle utilisée dans [15], avec comme étape principale la démonstration d'un analogue du théorème 4.2 qui s'exprimerait de la manière suivante :

**Conjecture A.2.7** *On suppose que le processus  $\mu_t \in \mathcal{C}([0, 1], \mathcal{P}(\mathbb{R}^+))$  satisfait l'équation*

$$\begin{aligned} \int f(x, t) d\mu_t(x) &= \int f(x, 0) d\mu_0(x) + \int_0^t \int (\partial_s f(x, s) + \partial_x f(x, s)) d\mu_s(x) ds \\ &+ \int_0^t \iint \left( \frac{x+y}{2} \right) \left( \frac{\partial_x f(x, s) - \partial_x f(y, s)}{x-y} \right) d\mu_s(x) d\mu_s(y) ds, \\ &+ \int_0^t \int x k_s(x) \partial_x f(x, s) d\mu_s(x) ds, \end{aligned} \tag{A.5}$$

pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}_b^{2,1}(\mathbb{R} \times [0, 1])$  et pour un processus mesurable  $k$  qui appartient à  $L^2(\mu_t)$ . Alors pour tout  $A$   $R$ -diagonal, le processus  $\mu_t^A = \mu_t \boxplus_W \mu_{AA^*}$  satisfait la même équation où on a remplacé  $k$  par  $k^A$  lui aussi dans  $L^2(\mu_t)$  et tel que

$$\int_0^1 \mu_s \boxplus_W \mu_{AA^*} ((k_s^A)^2) ds \leq \int_0^1 \mu_s (k_s^2) ds.$$

Pour montrer ce théorème, une stratégie raisonnable consiste à s'appuyer sur la combinatoire des cumulants libres.

En effet, tout comme les moments dans le contexte classique (quand on a affaire à des variables bornées), les cumulants caractérisent les lois dont ils proviennent. L'idée est donc ici de déduire de l'équation (A.5) une équation vérifiée par les cumulants  $(c_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  associés à la loi  $\mu_t$  et de montrer que les cumulants  $(c_n^A(t))_{n \in \mathbb{N}}$  associés à la loi  $\mu_t \boxplus_W \mu_{AA^*}$  vérifient une équation de la même forme mais avec  $k_t^A$  à la place de  $k_t$ . Car si l'on se réfère à l'article [62], il doit être possible d'exprimer les  $c_n^A(t)$  en fonction des  $c_n(t)$  et de facteurs dépendant uniquement de la loi de  $A$ . En effet, on trouve dans cet article la relation suivante :

**Propriété A.2.8** *Si  $b$  est un élément  $R$ -diagonal et  $f$  la série déterminante de la paire  $(b, b^*)$  (cf Définition A.2.4) alors*

$$f = R_{\mu_{bb^*}} \boxtimes M\ddot{o}b,$$

où  $M\ddot{o}b$  est la série définie par l'équation (A.4) et, si  $g$  et  $h$  sont deux éléments de l'ensemble des séries formelles en  $k$  variables non commutatives  $z_1, \dots, z_k$ , l'opération  $\boxtimes$  est définie de sorte que les coefficients de  $g \boxtimes h$  s'expriment en fonction de ceux de  $g$  et de ceux de  $h$  en termes de la combinatoire des partitions non croisées (cf [62] pour le détail).

En particulier, cette propriété permet d'exprimer les cumulants  $f_n(t)$  de la paire  $(X_t, X_t^*)$  (où  $X_t^*$  est  $R$ -diagonal et  $X_t X_t^*$  est de loi  $\mu_t$ ) en fonction des  $c_n(t)$ . On utilise ensuite la propriété d'additivité des cumulants pour des variables libres pour exprimer la série déterminante de la paire

$(X_t + A, (X_t + A)^*)$  en fonction de celle de  $(X_t, X_t^*)$  et  $(A, A^*)$ . En effet, les paires  $(X_t, X_t^*)$  et  $(A, A^*)$  sont libres donc si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite des cumulants de  $(A, A^*)$ , ceux de la paire  $(X_t + A, (X_t + A)^*)$  sont donnés par  $f_n^A(t) = f_n(t) + a_n$ . Enfin, comme la série Möb possède pour l'opération  $\boxtimes$  un inverse (la série dont tous les coefficients sont égaux à 1), la propriété A.2.8 permet d'obtenir une expression des cumulants  $c_n^A(t)$  de  $(X_t + A)(X_t + A)^*$ , qui sont ceux qui nous intéressent, en fonction de la suite  $(f_n^A(t))_{n \in \mathbb{N}}$ .

Le schéma de la preuve est donc assez simple mais nous n'avons malheureusement pas pu lever tous les obstacles combinatoires.

### A.3 À propos de la convergence de la mesure de Brown

Si l'objectif de montrer la convergence de la mesure spectrale de l'hermitisée de  $\Xi_N$  par des techniques de grandes déviations paraît réalisable au vu de ce que nous avons exposé dans la partie précédente, on n'a en revanche aucune piste tangible pour traiter le problème de la continuité de la mesure de Brown soulevé par le contre-exemple A.1.4. Nous tenons cependant dans cette dernière partie à citer deux résultats encourageants qui corroborent la conjecture A.0.8.

#### A.3.1 Régularisation aléatoire de la mesure de Brown

Le premier résultat, dû à P. Śniady [69], affirme que le comportement mis en évidence dans le contre-exemple A.1.4 est vraiment pathologique et que si les entrées de la matrice considérée sont « suffisamment aléatoires », les convergences respectives des moments et de la mesure de Brown coïncident. Il s'exprime plus précisément de la manière suivante :

**Théorème A.3.1** *Soit  $(A^{(N)})_{N \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices aléatoires de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  qui converge pour la topologie donnée par les moments vers un élément  $x$  d'un espace de probabilités libres  $(\mathcal{A}, \varphi)$ <sup>g</sup>. On définit  $A_t^{(N)} = A^{(N)} + \sqrt{t}G^{(N)}$ , où  $G^{(N)}$  est une matrice de  $\mathcal{M}_N(\mathbb{C})$  à entrées gaussiennes, indépendantes, centrées, de variance  $\frac{1}{2N}$ . Alors il existe une suite  $(t_N)_{N \in \mathbb{N}}$  de réels positifs, avec  $\lim_{N \rightarrow \infty} t_N = 0$ , tels que les mesures de Brown de  $A_{t_N}^{(N)}$  convergent faiblement vers la mesure de Brown<sup>h</sup> de  $x$ .*

Autrement dit, une régularisation gaussienne, aussi petite qu'on veut, permet de lisser les éventuels points d'accumulation des valeurs propres dans le plan complexe de manière assez efficace pour contrôler la quantité  $A_N(z)$  introduite dans l'équation (A.2).

#### A.3.2 Forme de la mesure de Brown d'éléments $R$ -diagonaux

Le résultat que nous voulons mentionner pour finir est dû à U. Haagerup et F. Larsen et concerne la mesure de Brown d'un élément  $R$ -diagonal dans un espace de probabilités libres  $(\mathcal{A}, \varphi)$ . Dans l'article [40], les auteurs établissent plusieurs résultats sur le sujet dont le suivant :

**Théorème A.3.2** *Soit  $T$  un élément  $R$ -diagonal de  $(\mathcal{A}, \varphi)$  et  $\mu_T$  sa mesure de Brown. Alors*

<sup>g</sup>Cela signifie que  $\forall n \in \mathbb{N}$  et  $s_1, \dots, s_n \in \{1, *\}$ ,  $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \text{tr}_N [(A^{(N)})^{s_1} \dots (A^{(N)})^{s_n}] = \varphi(x^{s_1} \dots x^{s_n})$ .

<sup>h</sup>On rappelle que pour un élément  $x$  d'une algèbre de von Neumann la mesure de Brown  $\mu_x$  est définie par  $\mu_x := \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\partial^2}{\partial a^2} + \frac{\partial^2}{\partial b^2} \right) \ln \Delta(x - (a + ib))$  où  $\Delta(x) = \exp(\varphi \ln |x|)$  est le déterminant de Kadison-Fuglede de  $x$ .

– si  $\text{Ker}T = \{0\}$  et  $T^{-1} \in L^2(\mathcal{A}, \varphi)$ , le support de  $\mu_T$  est un anneau donné par

$$\text{supp } \mu_T = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} / \frac{1}{\|T^{-1}\|_2} \leq |\lambda| \leq \|T\|_2 \right\},$$

– sinon, c'est le disque de rayon  $\|T\|_2$ .

Or il est facile de voir que, par invariance par rotation de la loi  $\mathbb{P}_N^V$ , si la suite  $\Xi_N$  a une limite pour la convergence des moments, cette limite est nécessairement  $R$ -diagonale, ce qui fait de ce résultat une confirmation du « Single Ring Theorem » (Conjecture A.0.8) des physiciens.

AUTEUR : On doit “connaître des auteurs” ;  
inutile de savoir leurs noms.

G. FLAUBERT, Dictionnaire des Idées Reçues.

# Bibliographie

- [1] ARNOLD, L. On the asymptotic distribution of the eigenvalues of random matrices. *J. Math. Anal. Appl.* 20 (1967), 262–268.
- [2] BAI, Z. D. Convergence rate of expected spectral distributions of large random matrices. I. Wigner matrices. *Ann. Probab.* 21, 2 (1993), 625–648.
- [3] BAI, Z. D. Circular law. *Ann. Probab.* 25, 1 (1997), 494–529.
- [4] BAI, Z. D. Methodologies in spectral analysis of large-dimensional random matrices, a review. *Statist. Sinica* 9, 3 (1999), 611–677. With comments by G. J. Rodgers and Jack W. Silverstein ; and a rejoinder by the author.
- [5] BAIK, J., BEN AROUS, G., AND PÉCHÉ, S. Phase transition of the largest eigenvalue for non-null complex sample covariance matrices. Preprint, <http://arxiv.org/abs/math.PR/0403022>, 2004.
- [6] BEN AROUS, G. Methods de Laplace et de la phase stationnaire sur l’espace de Wiener. *Stochastics* 25, 3 (1988), 125–153.
- [7] BEN AROUS, G., DEMBO, A., AND GUIONNET, A. Aging of spherical spin glasses. *Probab. Theory Related Fields* 120, 1 (2001), 1–67.
- [8] BEN AROUS, G., AND GUIONNET, A. Large deviations for Wigner’s law and Voiculescu’s non-commutative entropy. *Probab. Theory Related Fields* 108, 4 (1997), 517–542.
- [9] BERCU, B., GAMBOA, F., AND ROUAULT, A. Large deviations for quadratic forms of stationary Gaussian processes. *Stochastic Process. Appl.* 71, 1 (1997), 75–90.
- [10] BIANE, P. Free probability for probabilists. In *Quantum probability communications, Vol. XI (Grenoble, 1998)*, QP-PQ, XI. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2003, pp. 55–71.
- [11] BOLTHAUSEN, E. Laplace approximations for sums of independent random vectors. *Probab. Theory Relat. Fields* 72, 2 (1986), 305–318.
- [12] BOREL, E. Sur les principes de la théorie cinétique des gaz. *Annales de l’École Normale Supérieure* 23 (1906), 9–32.
- [13] BRÖCKER, T., AND TOM DIECK, T. *Representations of compact Lie groups*, vol. 98 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [14] CABANAL DUVILLARD, T., AND GUIONNET, A. Large deviations upper bounds for the laws of matrix-valued processes and non-communicative entropies. *Ann. Probab.* 29, 3 (2001), 1205–1261.
- [15] CABANAL-DUVILLARD, T., AND GUIONNET, A. Discussions around Voiculescu’s free entropies. *Adv. Math.* 174, 2 (2003), 167–226.

- 
- [16] COLLINS, B. Moments and cumulants of polynomial random variables on unitary groups, the Itzykson-Zuber integral, and free probability. *Int. Math. Res. Not.*, 17 (2003), 953–982.
- [17] COLLINS, B., AND SNIADY, P. Integration with respect to the Haar measure on unitary, orthogonal and symplectic group. *Preprint*, <http://arxiv.org/abs/math-ph/0402073> (2004).
- [18] D'ARISTOTILE, A., DIACONIS, P., AND NEWMAN, C. M. Brownian motion and the classical groups. In *Probability, statistics and their applications : papers in honor of Rabi Bhattacharya*, vol. 41 of *IMS Lecture Notes Monogr. Ser.* Inst. Math. Statist., Beachwood, OH, 2003, pp. 97–116.
- [19] DEIFT, P., KRIECHERBAUER, T., MCCLAUGHLIN, K. T.-R., VENAKIDES, S., AND ZHOU, X. Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory. *Comm. Pure Appl. Math.* 52, 11 (1999), 1335–1425.
- [20] DEIFT, P. A. *Orthogonal polynomials and random matrices : a Riemann-Hilbert approach*, vol. 3 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1999.
- [21] DEMBO, A., AND ZEITOUNI, O. *Large deviations techniques and applications*, second ed., vol. 38 of *Applications of Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [22] DI FRANCESCO, P., AND ITZYKSON, C. A generating function for fatgraphs. *Ann. Inst. H. Poincaré Phys. Théor.* 59, 2 (1993), 117–139.
- [23] ERCOLANI, N. M., AND MCCLAUGHLIN, K. D. T.-R. Asymptotics of the partition function for random matrices via Riemann-Hilbert techniques and applications to graphical enumeration. *Int. Math. Res. Not.*, 14 (2003), 755–820.
- [24] EYNARD, B. An introduction to random matrices. Cours de Physique Théorique de Saclay, november 2000. CEA/SPhT, Saclay.
- [25] FEINBERG, J., SCALETTAR, R., AND ZEE, A. “Single ring theorem” and the disk-annulus phase transition. *J. Math. Phys.* 42, 12 (2001), 5718–5740.
- [26] FEINBERG, J., AND ZEE, A. Non-Gaussian non-Hermitian random matrix theory : phase transition and addition formalism. *Nuclear Phys. B* 501, 3 (1997), 643–669.
- [27] FEINBERG, J., AND ZEE, A. Non-Hermitian random matrix theory : method of Hermitian reduction. *Nuclear Phys. B* 504, 3 (1997), 579–608.
- [28] FORRESTER, P. J. The spectrum edge of random matrix ensembles. *Nuclear Phys. B* 402, 3 (1993), 709–728.
- [29] GEMAN, S. A limit theorem for the norm of random matrices. *Ann. Probab.* 8, 2 (1980), 252–261.
- [30] GINIBRE, J. Statistical ensembles of complex, quaternion, and real matrices. *J. Mathematical Phys.* 6 (1965), 440–449.
- [31] GIRKO, V. L. The circle law. *Teor. Veroyatnost. i Mat. Statist.*, 28 (1983), 15–21.
- [32] GROMOV, M., AND MILMAN, V. D. A topological application of the isoperimetric inequality. *Amer. J. Math.* 105, 4 (1983), 843–854.
- [33] GROSS, D. J., AND MATYTSIN, A. Some properties of large- $N$  two-dimensional Yang-Mills theory. *Nuclear Phys. B* 437, 3 (1995), 541–584.

- 
- [34] GUIONNET, A. First order asymptotics of matrix integrals; a rigorous approach towards the understanding of matrix models. *Comm. Math. Phys.* (2003).
- [35] GUIONNET, A. Large deviations and stochastic calculus for large random matrices. Preprint, 2004.
- [36] GUIONNET, A., AND MAÏDA, M. An asymptotic log-Fourier interpretation of the  $R$ -transform. Preprint, <http://lanl.arXiv.org/abs/math.PR/0406121>. To appear in *J. Funct. Anal.*
- [37] GUIONNET, A., AND MAÏDA, M. Character expansion method for the first order asymptotics of a matrix integral. Preprint, <http://lanl.arXiv.org/abs/math.PR/0401229>. To appear in *Probab. Theory Related Fields*.
- [38] GUIONNET, A., AND ZEITOUNI, O. Large deviations asymptotics for spherical integrals. *J. Funct. Anal.* 188, 2 (2002), 461–515.
- [39] GUIONNET, A., AND ZEITOUNI, O. Addendum to large deviations asymptotics for spherical integrals. *J. Funct. Anal. To appear* (2004).
- [40] HAAGERUP, U., AND LARSEN, F. Brown’s spectral distribution measure for  $R$ -diagonal elements in finite von Neumann algebras. *J. Funct. Anal.* 176, 2 (2000), 331–367.
- [41] HARISH-CHANDRA. Differential operators on a semisimple Lie algebra. *Amer. J. Math.* 79 (1957), 87–120.
- [42] HARISH-CHANDRA. Fourier transforms on a semisimple Lie algebra. I. *Amer. J. Math.* 79 (1957), 193–257.
- [43] HARISH-CHANDRA. Fourier transforms on a semisimple Lie algebra. II. *Amer. J. Math.* 79 (1957), 653–686.
- [44] HIAI, F., AND PETZ, D. *The semicircle law, free random variables and entropy*, vol. 77 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.
- [45] HOYLE, D., AND RATTRAY, M. Limiting form of the sample covariance eigenspectrum in PCA and kernel PCA. In *Proceedings of Neural Information Processing Systems* (2003).
- [46] ITZYKSON, C., AND ZUBER, J. B. The planar approximation. II. *J. Math. Phys.* 21, 3 (1980), 411–421.
- [47] JIANG, T. How many entries of a typical orthogonal matrix can be approximated by independent normals? Preprint, 2003.
- [48] JOHANSSON, K. Discrete orthogonal polynomial ensembles and the Plancherel measure. *Ann. of Math. (2)* 153, 1 (2001), 259–296.
- [49] KARLIN, S., AND MCGREGOR, J. Coincidence probabilities. *Pacific J. Math.* 9 (1959), 1141–1164.
- [50] KAZAKOV, V. Solvable matrix models. In *Random matrix models and their applications*, vol. 40 of *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, pp. 271–283.
- [51] KAZAKOV, V. A., STAUDACHER, M., AND WYNTER, T. Character expansion methods for matrix models of dually weighted graphs. *Comm. Math. Phys.* 177, 2 (1996), 451–468.
- [52] KAZAKOV, V. A., AND ZINN-JUSTIN, P. Two-matrix model with  $ABAB$  interaction. *Nuclear Phys. B* 546, 3 (1999), 647–668.
- [53] LALOUX, L., CIZEAU, P., POTTERS, M., AND BOUCHAUD, J. Random matrix theory and financial correlations. *Intern. J. Theor. Appl. Finance* 3, 3 (2000), 391–397.

- [54] MACDONALD, I. G. *Symmetric functions and Hall polynomials*, second ed. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1995. With contributions by A. Zelevinsky, Oxford Science Publications.
- [55] MARČENKO, V. A., AND PASTUR, L. A. Distribution of eigenvalues in certain sets of random matrices. *Mat. Sb. (N.S.)* 72 (114) (1967), 507–536.
- [56] MARINARI, E., PARISI, G., AND RITORT, F. Replica field theory for deterministic models. II. A non-random spin glass with glassy behaviour. *J. Phys. A* 27, 23 (1994), 7647–7668.
- [57] MATYTSIN, A. On the large- $N$  limit of the Itzykson-Zuber integral. *Nuclear Phys. B* 411, 2-3 (1994), 805–820.
- [58] MEHTA, M. L. A method of integration over matrix variables. *Comm. Math. Phys.* 79, 3 (1981), 327–340.
- [59] MEHTA, M. L. *Random matrices*, second ed. Academic Press Inc., Boston, MA, 1991.
- [60] MEHTA, M. L., AND MAHOUX, G. A method of integration over matrix variables. III. *Indian J. Pure Appl. Math.* 22, 7 (1991), 531–546.
- [61] MIGDAL, A. Recursion equations in lattice gauge theories. *Sov. Phys. JETP* 42 (1975).
- [62] NICA, A., AND SPEICHER, R.  $R$ -diagonal pairs—a common approach to Haar unitaries and circular elements. In *Free probability theory (Waterloo, ON, 1995)*, vol. 12 of *Fields Inst. Commun.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 149–188.
- [63] PÉCHÉ, S. *Universality of local eigenvalue statistics for random sample covariance matrices*. PhD thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2003.
- [64] PÉCHÉ, S. The largest eigenvalues of hermitian random matrices with non-centered entries. Preprint, 2004.
- [65] PLEUROU, V., GOPIKRISHNAN, P., ROSENOW, B., AMARAL, L. A. N., AND STANLEY, H. E. A random matrix theory approach to financial cross-correlations. *Phys. A* 287, 3-4 (2000), 374–382. Economic dynamics from the physics point of view (Bad Honnef, 2000).
- [66] ROCKAFELLAR, R. T. *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
- [67] SAGAN, B. E. *The symmetric group*. The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series. Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Pacific Grove, CA, 1991. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions.
- [68] SILVERSTEIN, J. W., AND BAI, Z. D. On the empirical distribution of eigenvalues of a class of large-dimensional random matrices. *J. Multivariate Anal.* 54, 2 (1995), 175–192.
- [69] ŚNIADY, P. Random regularization of Brown spectral measure. *J. Funct. Anal.* 193, 2 (2002), 291–313.
- [70] SPEICHER, R. Free probability theory and non-crossing partitions. *Sém. Lothar. Combin.* 39 (1997), Art. B39c, 38 pp. (electronic).
- [71] TALAGRAND, M. Concentration of measure and isoperimetric inequalities in product spaces. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 81 (1995), 73–205.
- [72] VOICULESCU, D. Addition of certain noncommuting random variables. *J. Funct. Anal.* 66, 3 (1986), 323–346.
- [73] VOICULESCU, D. The analogues of entropy and of Fisher’s information measure in free probability theory. I. *Comm. Math. Phys.* 155, 1 (1993), 71–92.



- 
- [74] VOICULESCU, D. The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory. II. *Invent. Math.* 118, 3 (1994), 411–440.
- [75] VOICULESCU, D. The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory. III. The absence of Cartan subalgebras. *Geom. Funct. Anal.* 6, 1 (1996), 172–199.
- [76] VOICULESCU, D. The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory. IV. Maximum entropy and freeness. In *Free probability theory (Waterloo, ON, 1995)*, vol. 12 of *Fields Inst. Commun.* Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 293–302.
- [77] VOICULESCU, D. The analogues of entropy and of Fisher's information measure in free probability theory. V. Noncommutative Hilbert transforms. *Invent. Math.* 132, 1 (1998), 189–227.
- [78] VOICULESCU, D. Lectures on free probability theory. In *Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1998)*, vol. 1738 of *Lecture Notes in Math.* Springer, Berlin, 2000, pp. 279–349.
- [79] WEYL, H. *The Classical Groups. Their Invariants and Representations.* Princeton University Press, Princeton, N.J., 1939.
- [80] WIGNER, E. P. On the distribution of the roots of certain symmetric matrices. *Ann. of Math.* (2) 67 (1958), 325–327.
- [81] WITTEN, E. On quantum gauge theories in two dimensions. *Comm. Math. Phys.* 141, 1 (1991), 153–209.
- [82] WITTEN, E. Two-dimensional gauge theories revisited. *J. Geom. Phys.* 9, 4 (1992), 303–368.
- [83] ZELDITCH, S. Macdonald's identities and the large  $N$  limit of  $YM_2$  on the cylinder. *Comm. Math. Phys.* 245, 3 (2004), 611–626.
- [84] ZVONKIN, A. Matrix integrals and map enumeration : an accessible introduction. *Math. Comput. Modelling* 26, 8-10 (1997), 281–304. Combinatorics and physics (Marseilles, 1995).

**Étude asymptotique du spectre de grandes matrices aléatoires.  
Applications aux modèles de matrices.**

Cette thèse apporte plusieurs contributions à l'étude mathématique des modèles de matrices.

Notre premier résultat est une justification mathématique à la méthode de développement en caractères utilisée pour traiter les modèles à plusieurs matrices, sous des hypothèses nécessaires de positivité. La preuve passe par l'obtention d'un résultat un peu plus général de grandes déviations pour la mesure empirique des tableaux d'Young.

Nous obtenons ainsi la convergence de la fonction de partition dans le modèle de Yang-Mills sur un cylindre ainsi que dans le modèle dit « des graphes doublement pondérés ».

Nous étudions par ailleurs les asymptotiques de l'intégrale sphérique de deux matrices hermitiennes ou symétriques dans le régime où l'une des deux matrices est de rang fini ou du moins beaucoup plus petit que la dimension. Nous établissons en particulier les asymptotiques complètes de l'intégrale sphérique lorsqu'une matrice est de rang 1 ainsi que la généralisation en rang supérieur quand les valeurs propres de la matrice de rang faible sont assez petites.

Ces asymptotiques fournissent une nouvelle preuve de l'additivité de la  $R$ -transformée par convolution libre ainsi qu'une nouvelle heuristique pour l'interprétation de cette transformée.

Nous appliquons enfin ces résultats à l'étude des déviations de la plus grande valeur propre d'une matrice aléatoire gaussienne symétrique réelle perturbée par une matrice de rang 1. Nous établissons des conditions sous lesquelles cette valeur propre se détache ou non du support de la loi semi-circulaire.

**Mots-clés :** Matrices aléatoires ; Grandes déviations ;  $R$ -transformée ; Probabilités libres.

**Code matière AMS :** 15A52 ; 60F10 ; 46L54.

---

**Asymptotic spectrum of large random matrices.  
Applications to matrix models.**

This thesis contributes to the mathematical study of matrix models.

We first get a mathematical justification to the well-known character expansion method for models involving several matrices, under necessary positivity assumptions. A crucial step is to get a more general large deviations result for the empirical measure of Young tableaux.

This allows to obtain convergence of the partition function for the cylindrical Yang-Mills model and the dually weighted graph model.

Besides, we study the asymptotic behavior of the spherical integral of two Hermitian or symmetric matrices in the case one matrix is of finite rank, or at least of rank much smaller than the dimension. In particular, we fully establish the asymptotics when one matrix is of rank 1. This extends to the higher rank case as far as the eigenvalues of the small rank matrix are small enough.

These asymptotics provide a new proof of the additivity of the  $R$ -transform under free convolution as well as a new heuristics for its interpretation.

We finally apply these results to large deviations of the largest eigenvalue of a symmetric Gaussian random matrix perturbed by a deterministic rank 1 matrix. We get an explicit criterion to test whether or not this eigenvalue departs from the support of the semi-circular law.

**Keywords:** Random Matrices; Large Deviations;  $R$ -transform; Free Probability.

**AMS Mathematical Subject Classification:** 15A52; 60F10; 46L54.