M1 Maths 2014-2015 Université Lille 1
Probabilités M407 Mylene.Maida@math.univ-lille1.fr

Devoir surveillé
UE M407 - Probabilités
Mercredi 5 novembre – Durée 2h

Le résumé du cours qui vous a été distribué est autorisé, à condition qu'il ne soit pas annoté. Tout autre document est interdit. Les calculatrices sont interdites. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans vos sacs. La clarté et la précision de la rédaction seront très sérieusement prises en compte dans la notation de la copie.

L'énoncé comporte deux pages. Il est composé de deux exercices et un problème.
Barême indicatif : Exercice 1 : 6 pts, Exercice 2 : 5 pts, Problème : 12 pts.

Exercice 1. *Dans cet exercice, vous serez particulièrement attentif à décrire précisément dans chaque question l'espace de probabilités dans lequel vous travaillez.*

1. 24 équipes, portant chacune une lettre de A à X, doivent participer à un tournoi sportif. Pour la première phase de jeu, les responsables du tournoi les répartissent en 3 groupes comportant chacun 8 équipes. Si la répartition se fait complètement au hasard (parmi les répartitions en 3 groupes de même taille), quelle est la probabilité que l'équipe A et l'équipe J se retrouvent dans le même groupe ?
2. Un facteur particulièrement étourdi a n lettres dans sa besace. Il les place chacune au hasard dans les k boîtes aux lettres de sa tournée, dont celle de Germaine. Quelle est la probabilité que Germaine ne reçoive aucun courrier ? Quelle est la probabilité qu'au moins une boîte aux lettres reste vide ? (On pourra donner cette dernière sous forme d'une somme).
3. Au poker, on utilise un jeu de 52 cartes, soit 13 de chacune des 4 "couleurs" (pique, cœur, carreau, trèfle). Joe joue au poker et reçoit donc une "main" de 5 cartes. On appelle X le nombre de "couleurs" différentes dans la main de Joe. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

Exercice 2. **Sans calcul ou presque...**
Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la densité $f_{(X,Y)}$ est donnée par

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \mathbf{1}_{[0,1]^2}(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Quelle est la loi de X ?
2. Calculer $\mathbb{P}(X \geq 2Y)$.
3. Déterminer la densité de la loi de $Z := XY$.
4. On pose $R := \min(X, 1 - X)$, $S := \max(X, 1 - X)$ et $T := \max(Y, 1 - Y)$.
   (a) Déterminer la loi de R, celle de S et enfin celle de T.
   (b) Le vecteur aléatoire (R, S) admet-il une densité ? Si oui, la déterminer.
   (c) Le vecteur aléatoire (R, T) admet-il une densité ? Si oui, la déterminer.
   (d) Calculer $\mathbb{E}(RS)$, puis $\mathbb{E}(RT)$.

Problème. Les variables sous-gaussiennes et leurs moments.

Partie I. Préliminaires sur la transformée de Laplace et autre.

1. Soit Z une variable aléatoire réelle. On définit $S_Z := \{\lambda > 0;\ \mathbb{E}(e^{\lambda Z}) < \infty\}$.
   Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{E}(e^{\lambda Z}) < \infty$, on pose $\psi_Z(\lambda) := \mathbb{E}(e^{\lambda Z})$.
   (a) Montrer que si S_Z est non vide, alors S_Z est un intervalle dont 0 est la borne inférieure. [On pourra commencer par traiter le cas où Z est à valeurs positives].
   (b) Montrer que la fonction ψ_Z est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intérieur de S_Z.
   (c) Montrer que si $\mathbb{E}(Z) = 0$, alors ψ_Z est supérieure ou égale à 1 partout où elle est définie.
2. On rappelle l'énoncé de l'inégalité de Tchebichev exponentielle : Si $\exists\lambda > 0$ tel que $\mathbb{E}(e^{\lambda Y}) < \infty$, alors, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(Y \geq t) \leq e^{-I(t)}$, où $I(t) = \sup_{\lambda \geq 0}(\lambda t - \ln \mathbb{E}(e^{\lambda Y}))$. Redémontrer ce résultat du cours.
3. Montrer que si N suit une loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \psi_N(\lambda) = e^{\frac{\lambda^2\sigma^2}{2}}$.
   [On rappelle qu'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ a pour densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \forall x \in \mathbb{R}$]
4. Montrer que, pour toute variable aléatoire T à valeurs positives et $p \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\mathbb{E}(T^p) = p\int_0^\infty u^{p-1}\mathbb{P}(T \geq u)du.$$

Partie II. Les moments d'une v.a. sous-gaussienne ne croissent pas trop vite.
Soit $\nu > 0$ et X une variable aléatoire réelle centrée (c'est-à-dire telle que $\mathbb{E}(X) = 0$). On dit que X est sous-gaussienne de facteur de variance ν (et on note $X \in SG(\nu)$) si et seulement si,
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \psi_X(\lambda) \leq e^{\frac{\lambda^2\nu}{2}}.$$

5. Montrer que si X est une variable aléatoire centrée dans $SG(\nu)$, alors,
$$\forall x > 0, \qquad \mathbb{P}(X \geq x) \leq e^{-\frac{x^2}{2\nu}}.$$
6. Vérifier que l'on a aussi, $\forall x > 0, \qquad \mathbb{P}(-X \geq x) \leq e^{-\frac{x^2}{2\nu}}$.
7. En déduire que, si X est une variable aléatoire centrée dans $SG(\nu)$, alors, pour tout entier $q \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\mathbb{E}(X^{2q}) \leq 2q!(2\nu)^q \leq q!(4\nu)^q.$$

Partie III. Une variable aléatoire dont les moments ne croissent pas trop vite est sous-gaussienne.
Dans cette partie, on suppose que X est une variable aléatoire centrée telle qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout entier $q \in \mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{E}(X^{2q}) \leq q!C^q.$$
Soit X' une variable aléatoire de même loi que X et indépendante de X.

8. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. En utilisant un argument de convexité, montrer que, $\mathbb{E}[(X - X')^{2q}] \leq 2^{2q}\mathbb{E}(X^{2q})$. Que dire de $\mathbb{E}[(X - X')^{2q+1}]$?
9. En déduire que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(e^{\lambda(X-X')}) < \infty$. En donner une majoration en fonction de λ et de C.
10. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(e^{\lambda(X-X')}) = \mathbb{E}(e^{\lambda X})\mathbb{E}(e^{-\lambda X})$.
11. Conclure que $X \in SG(4C)$