M1 Maths 2013-2014
Probabilités M407

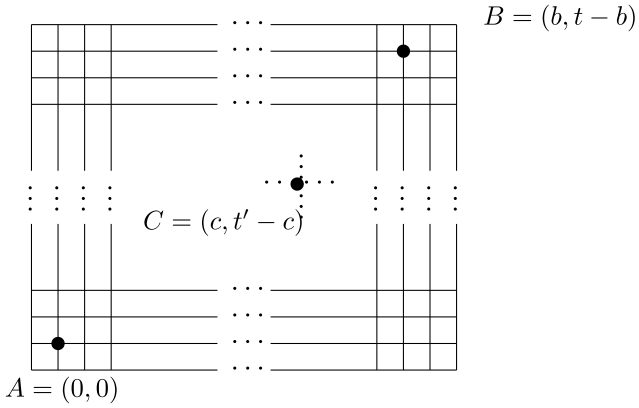
Université Lille 1
Mylene.Maida@math.univ-lille1.fr

Devoir surveillé
UE M407 - Probabilités
Mercredi 6 novembre – Durée 2h

Le résumé du cours qui vous a été distribué est autorisé, à condition qu'il ne soit pas annoté. Tout autre document est interdit. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans vos sacs.
Il vous est demandé de rédiger soigneusement vos réponses et en particulier de bien préciser le cas échéant l'espace de probabilités dans lequel vous travaillez.

Barême indicatif : Exercice 1 : 4 pts, Exercice 2 : 10 pts, Exercice 3 : 6 pts.

Exercice 1. Une fourmi se promène à vitesse constante sur un grillage à mailles carrées. Elle met une seconde pour parcourir la distance qui sépare deux croisements consécutifs. Elle ne peut avancer que vers le haut ou vers la droite.



On suppose que $b, t-b, c$ et $t'-c$ sont des entiers naturels tels que $c \leq b$ et $t'-c \leq t-b$.

1. En combien de temps la fourmi va-t-elle du point A de coordonnées $(0,0)$ au point B de coordonnées $(b, t-b)$?
2. Par combien de chemins différents la fourmi peut-elle aller de A vers B ?
3. Au point C de coordonnées $(c, t'-c)$, il y a une goutte de miel. Calculer le nombre de chemins allant de A vers B que peut faire la fourmi en mangeant la goutte de miel.
4. On suppose que la fourmi choisit au hasard un chemin pour aller de A vers B. Calculer la probabilité que la fourmi mange la goutte de miel.
5. Soit $0 < p < 1$. On suppose maintenant que la fourmi part de A, qu'elle reste t secondes sur le grillage, qu'à chaque point de croisement du grillage, elle va vers la droite avec une probabilité p et vers le haut avec une probabilité $1-p$.
   (a) Calculer la probabilité qu'a la fourmi d'arriver en B.
   (b) Calculer la probabilité si la fourmi est arrivée en B, qu'elle ait mangé la goutte de miel. Que constatez-vous ?

Exercice 2. (Autour des variables exponentielles)
On rappelle qu'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ est une variable aléatoire de densité f donnée par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. (Question de cours) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On dit que X est sans mémoire si et seulement si pour tout $s, t > 0$,
$$P_{\{X>t\}}(X > t + s) = P(X > s).$$
   (a) Soit X une variable de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que X est une variable sans mémoire.
   (b) Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On suppose que Y est sans mémoire. Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que Y suit une loi exponentielle de paramètre λ. *Indication : étudier la fonction G donnée par $G(t) = P(Y > t)$, pour $t \in \mathbb{R}_+$.*
2. On désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x. Soit Z une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $\lfloor Z \rfloor + 1$?
3. Un appareil est constitué de deux composants, le premier ayant une durée de vie T_1 et le deuxième une durée de vie T_2. Une fois qu'ils sont en panne, on ne peut pas les réparer. L'appareil ne peut fonctionner que si les deux composants fonctionnent.
On suppose que T_1 et T_2 sont deux variables exponentielles indépendantes de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.
   (a) Exprimer la durée de vie T de l'appareil en fonction de T_1 et T_2 puis déterminer la loi de T.
   (b) Si le premier composant a une durée de vie moyenne de 20h et le second de 30h, quelle est la durée de vie moyenne de l'appareil ?
   (c) Que vaut $P(T_1 = T_2)$?
   (d) On note N le numéro du composant qui tombe en panne le premier. Quelle est la loi de N ?
   (e) Montrer que N et T sont indépendants.
4. Soient $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes toutes de loi exponentielle de paramètre 1. Pour $1 \leq k \leq n+1$, on note $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ et pour $1 \leq k \leq n$, on note $U_k = \frac{S_k}{S_{n+1}}$. Montrer que le vecteur aléatoire $(U_1, \ldots, U_n)$ suit la loi uniforme sur le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ donné par
$$D = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; 0 < x_1 < \ldots < x_n < 1\}.$$

Exercice 3. On dispose d'une urne contenant B boules blanches et R boules rouges, toutes identiques au toucher.
On note X_i le numéro du tirage auquel on obtient pour la $i$ème fois une boule rouge.

On effectue dans un premier temps des tirages successifs avec remise.

1. Quelle est la loi de X_1 ? Quelle est son espérance ?
2. Quelle est la loi jointe de (X_1, X_2) ? En déduire la loi de X_2.
3. Quelle est la loi de X_R ? Quelle est son espérance ?

On effectue maintenant des tirages successifs de la façon suivante : on tire une boule au hasard dans l'urne ; si elle est rouge, on la retire ; si elle est blanche, on la remet dans l'urne.

4. Quelle est la loi jointe de (X_1, X_2) ?
5. Quelle est l'espérance de X_R ?
