M1 Maths 2014-2015 Université Lille 1
Probabilités M407 Mylene.Maida@math.univ-lille1.fr

# Feuille d'exercices n°5
# Convergence de suites de variables aléatoires et théorèmes limites

**Exercice** 1.
Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que $P(Y_n = e^n) = \frac{1}{n^2}$ et $P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$. La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en probabilité ? presque sûrement ? dans $L^p$ ?

**Exercice** 2. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels compris entre 0 et 1. On lui associe une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ qui vérifient

$$P(X_n \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \alpha_n + (1-\alpha_n)t^n & \text{si } t \in [0,1] \\ 1 & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

1. On suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\alpha$. Montrer que dans ce cas $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi et déterminer la loi limite.
2. La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut-elle converger en loi si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est divergente ?
3. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité si et seulement si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 ou vers 1.
4. Montrer que si la série de terme général $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers 1.

**Exercice** 3. Loi binomiale, loi de Poisson, loi normale

1. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires et $X$ une variable aléatoire toutes à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X$ si et seulement si $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(X_n = k)$ converge vers $P(X = k)$.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telles que $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$, avec $np_n$ qui converge vers $\lambda > 0$ lorsque $n$ tend vers l'infini.
   Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi et déterminer la loi limite.
3. Soit $(X_\lambda)_{\lambda>0}$ une famille de variables aléatoires telles que $X_\lambda$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. On pose $Y_\lambda = \frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$. Montrer que la famille $(Y_\lambda)_{\lambda>0}$ converge en loi quand $\lambda$ tend vers l'infini et déterminer la loi limite.

**Exercice** 4. Lemme de Scheffé

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n$ admet une densité $f_n$. On suppose que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers une fonction $f$ telle que $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 1$. Soit $X$ une variable aléatoire de densité $f$.

1. En utilisant l'égalité $|a - b| = a + b - 2\min(a, b)$, pour $a, b \in \mathbb{R}$., montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A\in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})} |P_{X_n}(A) - \int_A f d\lambda| = 0.$$
   En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $X$.
2. (Réciproque fausse) On suppose dans cette question que les densités $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définies par, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f_n(x) := \mathbf{1}_{[0,1]}(x)(1 - \cos(2\pi nx)).$$
   Etudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Exercice** 5. Soit $(T_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1. On pose, pour tout $n \geq 1$,

$$X_n = \min(T_1, \ldots, T_n) \text{ et } Y_n = \max(T_1, \ldots, T_n).$$

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
2. La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle presque sûrement ? Si oui, le montrer.
3. Montrer que l'événement "la suite $(Y_n)_{n\geq 1}$ est bornée" est de probabilité nulle.
4. Calculer, pour tout $n \geq 1$, la fonction de répartition de $Y_n - \log n$.
5. Montrer que la suite $(Y_n - \log n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on donnera la fonction de répartition.
6. Montrer que si $(A_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'événements telle que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) > 0$, alors
$$\mathbb{P}\Bigg(\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N} A_n\Bigg) > 0.$$
7. Pour tout $n \geq 1$, on note $B_n$ l'événement $B_n = \{Y_{\lfloor e^n \rfloor} \geq n, T_{\lfloor e^n \rfloor + 1} \leq n, T_{\lfloor e^n \rfloor + 2} \leq n, \ldots, T_{\lfloor e^{n+1} \rfloor} \leq n\}$. Calculer $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n)$ et vérifier que cette limite est strictement positive.
8. Montrer que sur l'événement $B_n$, on a l'égalité $Y_{\lfloor e^{n+1} \rfloor} - \log(e^{n+1}) = Y_{\lfloor e^n \rfloor} - \log(e^n) - 1$. En déduire que la suite $(Y_n - \log n)_{n\geq 1}$ n'est pas convergente au sens de la convergence presque sûre.

**Exercice** 6. Lemme de Slutsky

1. Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires. On suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable $X$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une constante déterministe $c$.
Montrer que la suite de couples de variables aléatoires $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers $(X, c)$.
2. Application : Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, de moyenne $m$ et de variance finie. On note $\overline{X}_n := \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$ leur moyenne empirique et $S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - m)^2$ leur variance empirique. On pose $T_n = \frac{\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)}{S_n}$. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.
3. Trouver un exemple de deux suites de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui convergent chacune en loi mais telles que la suite de couples de variables aléatoires $(X_n, Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas en loi.

**Exercice** 7. TCL vectoriel
On admet dans cet exercice que le théorème de Lévy est encore vrai dans $\mathbb{R}^d$.

1. Soit $Y = (Y_1, \ldots, Y_d)$ un vecteur aléatoire $L^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Montrer que sa fonction caractéristique $\varphi_Y$ admet le développement limité suivant :
$$\varphi_Y(t) = 1 + i\sum_{j=1}^{d} t_j E(Y_j) - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d} E(Y_j Y_k) t_j t_k + o(\|t\|^2).$$
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, indépendants, centrés, dans $L^2$, de même loi. On note $\Sigma$ leur matrice de covariance commune et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.
   (a) Calculer la fonction caractéristique de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ en fonction de celle de $X_1$.
   (b) Donner un développement limité au voisinage de 0 de la fonction caractéristique de $X_1$.
   (c) Montrer que $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi et déterminer la loi limite.