 Mylene.Maida@math.univ-lille1.fr

Feuille d'exercices n°4
Indépendance, convolution et conditionnement

Exercice 1.

1. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi gaussienne centrée réduite. Déterminer la loi de $\frac{X}{Y}$.
2. Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi de Cauchy standard. Déterminer la loi de $\frac{1}{Z}$.

Exercice 2. Soit X et Y deux variables indépendantes de lois géométriques de paramètres respectifs p_1 et p_2. Calculer $P(X > Y)$. Interpréter ce résultat en termes de lancers de pièces.

Exercice 3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Déterminer les densités des lois de $|X - Y|$ et $\min(X^3, Y)$.

Exercice 4. Soit $n \geq 2$ un entier. Soient $U_1, \ldots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes qui sont toutes de loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. On pose $A = \min(U_1, \ldots, U_n)$ et $B = \max(U_1, \ldots, U_n)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de B.
2. Calculer $\mathbb{P}(A \geq a, B \leq b)$ lorsque $a, b \in [0, 1]$, puis déterminer la fonction de répartition du vecteur (A, B).
3. Calculer la loi de $B - A$ et son espérance.
4. Dans un carré de 1 mètre de côté, 20 fleurs sont écloses. Quelle est l'espérance de l'aire du plus petit rectangle qui contient ces vingt fleurs ?

Exercice 5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle partie entière de x et on note $\lfloor x \rfloor$ l'unique entier relatif tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. On note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ la partie fractionnaire de x.

On considère l'espace de probabilités $([0, 1[, \mathscr{B}_{[0,1[}, \text{Leb})$, où Leb désigne la mesure de Lebesgue. Pour tout $n \geq 1$, on définit une variable X_n à valeurs réelles en posant

$$\forall x \in [0, 1[,\ X_n(x) = \lfloor 2\{2^{n-1}x\} \rfloor.$$

1. Soit $n \geq 1$ un entier. Soient $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{0, 1\}$. On pose $a = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k}\epsilon_k$ et $b = a + 2^{-n}$. Montrer que

$$\{x \in [0, 1[: X_1(x) = \epsilon_1, \ldots, X_n(x) = \epsilon_n\} = [a, b[.$$

Pour tout $n \geq 1$, déterminer la loi de X_n puis la loi du vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$.
La suite des variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$, définie sur l'espace de probabilités $([0, 1[, \mathscr{B}_{[0,1[}, \text{Leb})$, constitue un jeu de pile ou face infini.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ la suite de variables aléatoires construites à l'exercice précédent.

1. Montrer que la série
$$\sum_{n\geq 1} X_n 10^{-n}$$
est convergente et définit une variable aléatoire, qu'on notera Y.
2. Montrer que la fonction de répartition de Y est continue.
3. Montrer qu'il existe une partie $C \subset \mathbb{R}$ de mesure de Lebesgue nulle telle que $\mathbb{P}(Y \in C) = 1$. En déduire que la loi de Y n'admet pas de densité.

Exercice 7. Pour tout réel $t > 0$, on pose

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x}\, dx.$$

Soient θ et t deux réels strictement positifs. On appelle loi gamma de paramètres θ et t la loi de densité

$$\frac{\theta^t}{\Gamma(t)} x^{t-1} e^{-\theta x} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x).$$

1. Vérifier que la fonction $\Gamma(t)$ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Vérifier également que la densité donnée ci-dessus est bien d'intégrale égale à 1.
2. Calculer la fonction caractéristique de la loi $\Gamma(\theta, t)$.
3. Soient $t_1, \ldots, t_n$ des réels strictement positifs. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\Gamma(\theta, t_1), \ldots, \Gamma(\theta, t_n)$. Calculer la loi de la somme $X_1 + \ldots + X_n$.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire $Y = -X$?
2. Quelle est la loi de $X + Y$?

Exercice 9. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi de Cauchy standard. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 10. (Lois infiniment divisibles)
Soit X une variable aléatoire réelle de loi μ. On dit que μ est infiniment divisible si, pour chaque entier $n \geq 1$, il existe des variables aléatoires $X_{1,1}, \ldots, X_{n,n}$ indépendantes et de même loi ν_n telles que la loi de leur somme $X_{1,1} + \ldots + X_{n,n}$ soit μ.

1. Démontrer que μ est infiniment divisible ssi sa fonction caractéristique φ est, pour tout entier $n \geq 1$, la puissance n-ième d'une fonction caractéristique.
2. Dans les cas suivants, indiquer si μ est infiniment divisible ou pas :
   (a) $\mu = \delta_a$, pour $a \in \mathbb{R}$,
   (b) $\mu = \mathcal{N}(m, \sigma^2)$
   (c) $\mu = \mathcal{P}(\lambda)$
   (d) μ est la loi de Cauchy standard.
3. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables indépendantes de même loi de fonction caractéristique φ et N une variable suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, indépendante de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$. Pour chaque $\omega \in \Omega$, on pose
   $$Y(\omega) = \sum_{1\leq k\leq N(\omega)} X_k(\omega),$$
   avec la convention qu'une somme vide est égale à zéro.
   Calculer la fonction caractéristique de Y et montrer que la loi de Y est infiniment divisible.
4. Soit X de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, que nous noterons μ_p. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi ν telles que leur somme $X + Y$ soit de loi μ_p.
   (a) Soit B un intervalle qui ne contient pas 0 ni 1/2. On note $B+B = \{x+y; x, y \in B\}$. Montrer que $\mu_p(B + B) = 0$ et en déduire que $\nu \otimes \nu(B \times B) = 0$.
   (b) Déduire de la question précédente que Y ne peut prendre que les valeurs 0 et 1/2.
   (c) Conclure que μ_p n'est pas infiniment divisible.

Exercice 11. (Absence de mesure canonique sur $\mathbb{N}^*$)

Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$ telle que pour tout $n \geq 1$, la probabilité d'être divisible par n est égale à $1/n$.

1. Rappeler comment on démontre la formule d'Euler
$$\forall s > 0, \prod_{p\,\text{premier}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$
et en déduire que la somme des inverses des nombres premiers diverge.
2. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'une probabilité $\mathbb{P}$ ayant la propriété requise existe. Montrer que pour $n_1, \ldots, n_k$ deux à deux premiers entre eux, les événements "être divisble par n_i", pour $i \in \{1, \ldots, k\}$ sont indépendants sous $\mathbb{P}$.
3. En considérant les événements "être divisible par p" pour tous les p premiers, établir alors que $\mathbb{P}$-presque tout nombre a une infinité de diviseurs premiers, ce qui est absurde.

Exercice 12. On dispose d'un test pour savoir si quelqu'un est atteint d'une maladie donnée. Si la personne est malade, le test est positif dans 99,9 % des cas. Si la personne n'est pas malade, le test est négatif dans 99,9 % des cas.

On suppose que cette maladie touche une personne sur 1000. Une personne arrive au centre de dépistage, elle effectue le test, qui s'avère positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit effectivement malade ?

Exercice 13. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire. On dit que les variables $(X_1, \ldots, X_n)$ sont échangeables si pour toute permutation σ de $\{1, \ldots, n\}$, $X_\sigma := (X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$ a la même loi que X.

1. Vérifier que si X est échangeable alors, pour tout $m \leq n$, tout sous-ensemble de m variables X_i parmi n ont la même distribution.
2. On dispose d'une urne contenant 40 boules rouges et 60 boules noires. On tire **sans remise** 20 boules dans cette urne. Pour j entre 1 et 20, on appelle X_j la variable qui vaut 1 si la $j$ième boule tirée est rouge et 0 sinon. On note aussi S le nombre total de boules rouges tirées.
   (a) Expliquer pourquoi le vecteur $(X_1, \ldots, X_{20})$ est échangeable.
   (b) Quelle est la loi de X_j ?
   (c) Quelle est la loi jointe de (X_i, X_j) pour $i \neq j$?
   (d) Quelle est la probabilité que la dizième boule soit rouge sachant que la 18ième et la 19ième le sont ?
   (e) Calculer l'espérance et la variance de S.

Exercice 14. Soit U, V, W trois variables aléatoires indépendantes telles que U et W suivent une loi de Poisson de paramètre λ et V suit une loi de Poisson de paramètre μ. On pose $X := V + U$ et $Y := V + W$.

1. Déterminer les lois de X et de Y. On redémontrera en détail le résultat utilisé.
2. Montrer que la covariance $cov(X, Y)$ de X et Y existe et la calculer (on conseille d'éviter de calculer la loi jointe de (X, Y)).
3. Soit x un entier naturel.
   (a) Déterminer la loi conditionnelle de V sachant $[X = x]$.
   (b) En déduire que l'espérance conditionnelle de Y sachant $[X = x]$ est égale à $\lambda + \dfrac{x\mu}{\lambda + \mu}$.
   (c) Montrer que cette espérance est supérieure ou égale x si et seulement si $E(X) \geq x$.

4. On suppose que la taille d'un individu est la somme de deux variables aléatoires indépendantes, l'une représentant l'effet du patrimoine génétique, l'autre celui de l'environnement (alimentation...), et que ces variables aléatoires suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. La variable aléatoire X désigne la taille de la mère et Y celle de sa fille. Donner alors une interprétation du résultat de la question 3.

Exercice 15.

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. On note $\sigma(X)$ la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ qui rend X mesurable.

1. Montrer que
$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B); B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\}.$$
2. Soit $B \in \mathcal{F}$. Décrire explicitement $\sigma(X)$ si $X = \mathbf{1}_B$.
3. Plus généralement, décrire $\sigma(X)$ si X est une variable aléatoire discrète.
4. Soit Y une variable aléatoire réelle sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Montrer que Y est $\sigma(X)$-mesurable si et seulement si il existe une fonction mesurable $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $X = h(Y)$.

Exercice 16. Soit $\Omega =]0, 1]$ muni de sa tribu borélienne et de la probabilité uniforme P. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $\mathcal{B}_n$ la tribu engendrée par les intervalles $]\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit X une variable aléatoire P-intégrable ou positive sur Ω.

1. Décrire les fonctions $\mathcal{B}_n$-mesurables.
2. Calculer $E_{\mathcal{B}_n}[X]$.
3. On suppose que $X(\omega) = 1/\omega$. Vérifier que $P(E_{\mathcal{B}_n}[X] = \infty) > 0$.

Exercice 17. Soient X et Y les résultats indépendants de deux jets de dés et S leur somme.

1. Déterminer $E_S(X)$ et $E_X(S)$.
2. Déterminer la loi de X sachant que S est paire.

Exercice 18. Soit $p \in]0, 1[$ un réel. Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs entières telles que pour tous $k, l \in \mathbb{N}$ on ait
$$\mathbb{P}(X = k, Y = l) = (1 - p) \left(\frac{p}{e}\right)^k \frac{k^l}{l!}.$$
Calculer $\mathbb{E}_X[Y]$.

Exercice 19. Soit (X, Y, Z) un vecteur aléatoire de densité $f_{(X,Y,Z)}(x, y, z) = ce^{-z-2x}\mathbf{1}_{0x \leq y \leq z}$ où c est une constante réelle.

1. Déterminer c.
2. Calculer $\mathbb{E}_{(Y,Z)}[X]$, $\mathbb{E}_{(X,Z)}[Y]$, $\mathbb{E}_Y[X]$ et $\mathbb{E}_X[Y]$.