Université Lille 1
Mylene.Maida@math.univ-lille1.fr

Feuille 3
Autour du processus de Poisson

Soit $\lambda > 0$. On dit que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un *processus de Poisson de paramètre* λ si cette famille de variables aléatoires (v.a.) vérifie :

a. $Y_0 = 0$,

b. $\forall k \geq 2$, $\forall 0 \leq t_1 < \cdots < t_k$, les v.a. $Y_{t_2} - Y_{t_1}, \cdots, Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}$ sont indépendantes,

c. si $0 \leq s < t$, $Y_t - Y_s$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$.

Exercice 1. Dans un certain modèle financier, on remarque que le prix d'une action subit une discontinuité (un saut) à chaque fois que le service communication de la marque envoie un Twitt.

On s'intéresse au nombre de sauts observés au bout du temps t.

Pour $n \geq 1$, on note X_n la durée qui s'écoule entre le $n-1$-ième et le n-ième Twitt. On suppose dans tout le problème que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de (v.a.) indépendantes et toutes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On commence à observer au temps 0 ($S_0 = 0$) et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n le temps auquel le n-ième Twitt est envoyé. Exprimer S_n en fonction des variables $(X_n)_{n\geq 1}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la loi du vecteur aléatoire $(S_1, \ldots, S_n)$ a pour densité f_n avec
$$f_n(t_1, \ldots, t_n) := \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda t_n} & \text{si } 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. Déterminer la densité de la loi de la variable S_n.
4. Pour $t \geq 0$, on note N_t le nombre de Twitt envoyés dans l'intervalle de temps $[0, t]$. Exprimer l'événement $\{N_t = 0\}$ en fonction de X_1 puis calculer la probabilité de cet événement.
5. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer l'événement $\{N_t \geq k\}$ en fonction de S_k puis montrer que N_t suit une loi de Poisson, dont on exprimera le paramètre en fonction de λ et de t.
6. Calculer l'espérance, la variance et la fonction génératrice de la variable aléatoire N_t.
7. Soit $(U_j)_{j\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d, indépendante de la suite $(X_j)_{j\geq 1}$, telle que $E(|U_1|) < \infty$. Calculer $E\left(\prod_{i=1}^{N_t}(1 + U_j)\right)$.

On veut montrer que le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ.

7. Soient $0 \leq s \leq t$ et $k, \ell \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $\{N_s = k, N_t - N_s = \ell\}$ à l'aide des variables $(S_n)_{n\geq 1}$, puis calculer sa probabilité en utilisant la question 2.
8. Soient $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ et $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$. Procéder de la même façon avec l'événement $\{N_{t_1} = k_1, \forall 2 \leq i \leq n, N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = k_i\}$.
9. En déduire que $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson.