 Mylene.Maida@math.univ-lille1.fr

Feuille d'exercices n°3
Vecteurs aléatoires

Exercice 1. (Extrait de l'examen de seconde session 2014)
Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules rouges, qui sont indistingables au toucher. On tire successivement et **sans remise** les 5 boules de l'urne.
On s'intéresse aux variables aléatoires T_1, qui est le numéro du tirage auquel on obtient une boule blanche pour la première fois et T_2, qui est le numéro du tirage auquel on obtient une boule blanche pour la deuxième fois.

1. Proposer un espace de probabilité permettant de coder cette expérience aléatoire.
2. Déterminer la loi de la variable aléatoire T_1.
3. Sans calcul supplémentaire, donner la loi de $6 - T_2$, puis la loi de T_2.
4. Déterminer la loi jointe du couple (T_1, T_2).
5. Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?
6. Déduire de la question 4. la loi de $T_2 - T_1$.

Exercice 2. Une urne contient 5 boules rouges, 3 boules blanches et 2 boules noires. On effectue n tirages **avec remise** dans cette urne. On note N_1 le nombre de boules rouges, N_2 le nombre de boules blanches et N_3 le nombre de boules noires.

1. Quelle est la loi du vecteur aléatoire (N_1, N_2, N_3) ?
2. Quelles sont les marginales de cette loi ?
3. Quelle est la loi de (N_1, N_2) ?
4. Quelle est la loi de $(N_1, N_2 + N_3)$?
5. Calculer la matrice de covariance du vecteur (N_1, N_2, N_3).

Exercice 3. Soit $\theta > 0$ un réel. Soit (X, Y) un vecteur aléatoire dont la loi admet la densité

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \theta^2 e^{-\theta(x+y)} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x) \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(y).$$

Déterminer la loi du vecteur aléatoire $(X + Y, X - Y)$.

Exercice 4. Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire sur $\mathbb{R}^n$ dont la loi admet la densité

$$f_X(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)}.$$

1. Pour tout vecteur $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$, on définit une variable aléatoire

$$\Gamma_\xi = \langle \xi, X \rangle = \xi_1 X_1 + \ldots + \xi_n X_n.$$

   Pour tous ξ et η appartenant à $\mathbb{R}^n$, calculer la loi de Γ_ξ, puis calculer la covariance et le coefficient de corrélation de Γ_ξ et Γ_η.
2. Pour tout réel ϕ, calculer le coefficient de corrélation des variables aléatoires X_1 et $(\cos \phi) X_1 + (\sin \phi) X_2$.

3. Soit $R : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une transformation orthogonale, c'est-à-dire une isométrie linéaire. Déterminer la loi de $R(X)$.
4. Montrer que la loi du vecteur aléatoire $Z = \frac{(X_1,\ldots,X_n)}{\sqrt{X_1^2+\ldots+X_n^2}}$ est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}^n$ qui donne une probabilité 1 à la sphère unité, et qui donne la même probabilité à deux parties qui diffèrent l'une de l'autre par une rotation.

   On admettra qu'il existe une unique telle mesure de probabilités. On l'appelle la mesure uniforme sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.
5. Déterminer la loi de la distance au plan de l'équateur d'un point choisi uniformément au hasard sur la Terre.

Exercice 5. On considère les quatre matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \ , \ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Dire pourquoi ni A ni B ne peut être la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire de dimension 2.
2. Donner un exemple d'un vecteur aléatoire de dimension 2 dont la matrice de covariance est la matrice D.
3. La matrice C est-elle la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire ? Si vous pensez que non, démontrez-le et si vous pensez que oui, donnez un exemple d'un vecteur dont elle est la matrice de covariance.

Exercice 6. (Extrait du devoir surveillé 2013)
Un appareil est constitué de deux composants, le premier ayant une durée de vie T_1 et le deuxième une durée de vie T_2. Une fois qu'ils sont en panne, on ne peut pas les réparer. L'appareil ne peut fonctionner que si les deux composants fonctionnent.
On suppose que T_1 et T_2 sont deux variables exponentielles indépendantes de paramètres respectifs λ_1 et λ_2.

1. Exprimer la durée de vie T de l'appareil en fonction de T_1 et T_2 puis déterminer la loi de T.
2. Si le premier composant a une durée de vie moyenne de 20h et le second de 30h, quelle est la durée de vie moyenne de l'appareil ?
3. Que vaut $P(T_1 = T_2)$?
4. On note N le numéro du composant qui tombe en panne le premier. Quelle est la loi de N ?
5. Montrer que N et T sont indépendants.

Exercice 7. (Extrait du devoir surveillé 2013)
Soient $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes toutes de loi exponentielle de paramètre 1. Pour $1 \leq k \leq n+1$, on note $S_k = X_1 + \ldots + X_k$ et pour $1 \leq k \leq n$, on note $U_k = \frac{S_k}{S_{n+1}}$. Montrer que le vecteur aléatoire $(U_1, \ldots, U_n)$ suit la loi uniforme sur le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ donné par

$$D = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; 0 < x_1 < \ldots < x_n < 1\}.$$