Université Lille 1
Mylene.Maida@math.univ-lille1.fr

# Feuille 2
# Crochet d'un processus d'Itô et premier contact avec la formule d'Itô

Dans tous les exercices ci-dessous, $(B_t)_{t\geqslant 0}$ désignera un mouvement brownien standard et $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ sa filtration canonique (complétée).

**Exercice 1.** Dans cet exercice, on se propose de montrer qu'une $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$-martingale, nulle en 0, à trajectoires continues qui est à variation finie est nulle. Soit $(M_t)_{t\geqslant 0}$ un tel processus.

1. Soit $0 = t_0^n \leq t_1^n \leq \ldots \leq t_{p_n}^n = T$ une suite de subdivisions de $[0,T]$ telles que $\sup_{1\leq i\leq p_n} |t_i^n - t_{i-1}^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Montrer que, quand $n$ tend vers l'infini, $E\left(\sum_{i=1}^{p_n}(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2\right)$ converge vers 0.
2. Montrer par ailleurs que $E\left(\sum_{i=1}^{p_n}(M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2\right) = E\left(M_T^2 - M_0^2\right).$
3. En déduire que p.s. $M_T = 0$.
4. Conclure que p.s. $\forall t \leq T$, $M_t = 0$.

**Exercice 2.** Soient $X$ et $Y$ deux processus d'Itô. On définit leur crochet croisé de la manière suivante :

$$\langle X, Y\rangle := \frac{1}{4}\left(\langle X+Y, X+Y\rangle - \langle X-Y, X-Y\rangle\right).$$

1. Montrer que si $0 = t_0^n \leq t_1^n \leq \ldots \leq t_{p_n}^n = T$ est une suite de subdivisions de $[0,T]$ telles que $\sup_{1\leq i\leq p_n} |t_i^n - t_{i-1}^n| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors
$$\sum_{i=1}^{p_n}(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n})(Y_{t_i^n} - Y_{t_{i-1}^n})$$
converge en probabilité vers $\langle X, Y\rangle_T$.
2. Si $B_1$ et $B_2$ sont deux mouvements browniens indépendants, calculer $\langle B_1, B_2\rangle_T$.
3. Donner la décomposition de $X = B_1^2 + B_2^2$.

**Exercice 3.** Soient $X$ et $Y$ deux processus d'Itô, avec $\forall t \leq T, X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dB_s$ et $Y_t = X_0 + \int_0^t \tilde{K}_s ds + \int_0^t \tilde{H}_s dB_s$.
En utilisant la formule d'Itô, donner la décomposition de chacun des processus suivants :

1. $X^2$
2. $XY$
3. $t \mapsto \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. $t \mapsto B_t^3 - \alpha t B_t$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeurs de $\alpha$ ce processus est-il une martingale ?

**Exercice 4.**
Soit $X$ un processus d'Itô qui vérifie, pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s,$$

avec $b$ et $\sigma$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ bornées.

Montrer que si $f$ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, b(x)f'(x) + \frac{1}{2}\sigma(x)f''(x) = 0,$$

alors le processus $f(X)$ est une martingale.