Université Lille 1
Mylene.Maida@math.univ-lille1.fr

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$2
Variables aléatoires, lois, moments

Exercice 1. On lance deux dés à six faces non pipés. Déterminer la loi de la différence entre le plus grand et le plus petit lancer.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$.

1. On pose $Y = \tan(\pi(X - \frac{1}{2}))$. Quelle est la loi de Y ?
2. On pose $Z = \ln(1/X)$. Quelle est la loi de Z ?
3. On pose $L = \ln(X)$. Quelle est la loi de L ?

Exercice 3.

1. On choisit un point uniformément **sur le cercle unité** dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la loi de son abscisse ?
2. On choisit un point uniformément **dans le disque unité** dans $\mathbb{R}^2$. Quelle est la loi de son abscisse ?

Exercice 4. **(variables sans mémoire)**

1. Que peut-on dire de la loi d'une variable aléatoire X valeurs dans $\mathbb{N}$ qui satisfait, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, l'égalité
$$P(X > n + m) = P(X > n)P(X > m)?$$
On pourra considérer $G(n) = P(X > n)$ et exprimer $G(n)$ en fonction de $G(1)$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On considère maintenant une variable aléatoire réelle Y qui satisfait, pour tous $t, s \geq 0$, l'égalité
$$P(Y > t + s) = P(Y > t)P(Y > s).$$
Pour $t \geq 0$, on note $H(t) = P(Y > t)$. Exprimer $H(x)$ en fonction de $H(1)$, d'abord pour $x \in \mathbb{N}^*$, puis pour $x \in \mathbb{Q}^+$. En déduire la loi de Y.
3. On désigne par $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x. Soit Z une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Quelle est la loi de $\lfloor Z \rfloor + 1$?

Exercice 5. Soient X et Y deux variables aléatoires **bornées**. On suppose que pour tout $n \geq 1$, on a $\mathbb{E}[X^n] = \mathbb{E}[Y^n]$.

1. Montrer que pour toute fonction polynomiale $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}[p(X)] = \mathbb{E}[p(Y)]$.
2. Montrer que ce résultat est encore vrai si on suppose seulement que p est une fonction continue.
3. En déduire que pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a $\int_{\mathbb{R}} f \, dP_X = \int_{\mathbb{R}} f \, dP_Y$. En déduire que X et Y ont même loi.
4. Peut-on étendre ce résultat à des variables aléatoires qui ne sont plus bornées ?

Exercice 6. Au verso, vous trouverez des représentations des fonctions de répartition, des fonctions caractéristiques et, lorsqu'elles existent, des densités des lois suivantes : loi exponentielle de paramètre 1, loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$, loi de Cauchy standard, et deux autres lois.

1. Donnez à chaque graphique sa légende en précisant de quelle loi il s'agit et de quelle fonction : fonction de répartition, fonction caractéristique ou densité.
2. Deux des fonctions promises n'ont pas été représentées. Pourquoi ?

Exercice 6 (suite).